凸函数与琴生不等式

黄 宣 国

上 海 教 育 出 版 社

(沪)新登字 107 号

凸函数与琴生不等式

黄 宣 国

上海教育出版社出版发行
(上海永福路 123 号)
各地新华书店经销　江苏太仓印刷厂印刷
开本787×1092 1/32　印张 6　字数129,000
1991 年12月第 1 版　1991 年12月第 1 次印刷
印数1—1,300本
ISBN 7-5320-2487-3/G·2424　定价：2.05 元

前言

在中学数学竞赛里，不等式是一个重要的内容，怎样来学习这一内容呢？

读者知道二次函数、正弦和余弦函数、正切和余切函数，在可能相差一个符号的前提下，它们都是凸函数(见第一节)．在现实世界中，凹凸现象是层出不穷的，高山凹凸起伏，蜿蜒连绵；大海波澜壮阔，峰谷(即凹凸)迭起；在机械工业中，凸轮的应用非常广泛．用数学的语言来讲，凸函数是数学中一个值得研究的分支，它几乎包括中学数学中大多数重要的函数．

韩愈在《进学解》里说："记事者必提其要，纂言者必钩其玄．"万山磅礴，必有主峰，龙衮九章，但挈一领，不等式题目成百上千，把凸函数和不等式结合起来，从凸函数的基本不等式(琴生不等式)学起，有条不紊和较有系统地领略千姿百态的不等式领域，对提高读者的数学水平是有益的．

在写这本小册子时，我有两个目标，一个是题目尽可能新颖，另一个是解法尽可能简洁、易懂．这本小册子里的部分内容曾对中学数学奥林匹克竞赛国家集训队讲过几次，受到同学们的欢迎．值此情形，我向上海教育出版社推荐此书．我想凡是具有高中水平的读者都能读懂这本小册子．我更希望参加数学竞赛的同学能选择这本小册子作为数学课外活动的材料，从中提高解不等式方面的能力和修养，并祝广大同学能

在数学竞赛中取得优异成绩.

复旦大学数学研究所　黄宣国

一九九〇年六月

目　　录

一　琴生不等式的证明

我们都知道下面一些不等式:

(1) 当 $0\leqslant x_1$, $x_2\leqslant\pi$ 时(这表明 x_1, x_2 两个实数都大于等于 0, 而小于等于 π),

$$\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)=\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)$$
$$\leqslant\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2),$$

因而,

$$-\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)\geqslant-\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2).\qquad(1.1)$$

(2) 当 x_1, x_2 全是正实数时,

$$\sqrt{x_1x_2}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2),\qquad(1.2)$$

两边取对数,并且两端乘以 -1, 有

$$-\frac{1}{2}(\lg x_1+\lg x_2)=-\lg\sqrt{x_1x_2}$$
$$\geqslant-\lg\frac{1}{2}(x_1+x_2).\qquad(1.3)$$

(3) 当 p 是自然数, $x_1>0$ 和 $x_2>0$ 时, 有

$$\frac{1}{2}(x_1^p+x_2^p)\geqslant\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^p.\qquad(1.4)$$

(1.4) 的一个简单的证明是对 p 用数学归纳法. 当 $p=1$, 2 时, 请读者自己验证(1.4). 假设当 $p=k$ 时, (1.4)成立, 那么,

$$\frac{1}{2}(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})=\frac{1}{4}(x_1^k+x_2^k)(x_1+x_2)$$

$$+\frac{1}{4}(x_1^k-x_2^k)(x_1-x_2)$$

$$\geqslant\frac{1}{4}(x_1^k+x_2^k)(x_1+x_2)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^k(x_1+x_2)$$

$$=\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^{k+1}. \tag{1.5}$$

所以，不等式(1.4)的确成立.

读者一定会说，这有什么稀奇，还能写出许多类似的不等式呢.

(4) 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x_1,\ x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时(这表明实数 x_1、x_2 都大于等于 $-\frac{\pi}{2}$，而且小于等于 $\frac{\pi}{2}$. 下面类似情况不再说明)，

$$\frac{1}{2}(\cos x_1+\cos x_2)=\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)$$

$$\leqslant\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2).$$

因而，

$$-\frac{1}{2}(\cos x_1+\cos x_2)\geqslant-\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.6}$$

(5) 当 $0\leqslant x_1,\ x_2<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\operatorname{tg} x_1+\operatorname{tg} x_2=\frac{\sin x_1}{\cos x_1}+\frac{\sin x_2}{\cos x_2}=\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)}{\cos x_1\cos x_2},$$

而

$$\cos x_1 \cos x_2 = \frac{1}{2}[\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)]$$
$$\leqslant \frac{1}{2}[1+\cos(x_1+x_2)]$$
$$=\cos^2\frac{1}{2}(x_1+x_2),$$

于是,

$$\operatorname{tg} x_1+\operatorname{tg} x_2 \geqslant \frac{2\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)} = 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.7}$$

(6) 当 $0<x_1,\ x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\operatorname{ctg} x_1+\operatorname{ctg} x_2 = \frac{\cos x_1}{\sin x_1}+\frac{\cos x_2}{\sin x_2} = \frac{\sin(x_1+x_2)}{\sin x_1 \sin x_2}$$
$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\sin x_1 \sin x_2},$$

而

$$\sin x_1 \sin x_2 = \frac{1}{2}[-\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)]$$
$$\leqslant \frac{1}{2}[1-\cos(x_1+x_2)]$$
$$=\sin^2\frac{1}{2}(x_1+x_2),$$

所以,

$$\operatorname{ctg} x_1+\operatorname{ctg} x_2 \geqslant \frac{2\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)} = 2\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(x_1+x_2). \tag{1.8}$$

(7) x_1, x_2 是任意实数，利用(1.2)，有

$$10^{x_1}+10^{x_2}\geqslant 2\cdot 10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)},$$

于是，

$$\begin{aligned}(1+10^{x_1})(1+10^{x_2})&=1+(10^{x_1}+10^{x_2})+10^{x_1+x_2}\\&\geqslant 1+2\cdot 10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+10^{x_1+x_2}\\&=[1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}]^2,\end{aligned}\tag{1.9}$$

对不等式(1.9)两边取对数，有

$$\frac{1}{2}[\lg(1+10^{x_1})+\lg(1+10^{x_2})]\geqslant \lg(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}).\tag{1.10}$$

(8) h 是一个正常数，x_1, x_2 是实数，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(\sqrt{h^2+x_1^2}+\sqrt{h^2+x_2^2})^2-\left[h^2+\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2\right]\\&=\frac{1}{4}[2h^2+x_1^2+x_2^2+2\sqrt{(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)}]\\&\quad-\left[h^2+\frac{1}{4}(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)\right]\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)}-\frac{1}{2}(h^2+x_1x_2),\end{aligned}$$

利用(1.2)(显然(1.2)对非负实数也成立)，有

$$\begin{aligned}(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)&=h^4+h^2(x_1^2+x_2^2)+x_1^2x_2^2\\&\geqslant h^4+2x_1x_2h^2+x_1^2x_2^2\\&=(h^2+x_1x_2)^2,\end{aligned}\tag{1.11}$$

那么，

$$\frac{1}{4}(\sqrt{h^2+x_1^2}+\sqrt{h^2+x_2^2})^2\geqslant h^2+\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2,$$

两边开方，有

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{h^2+x_1^2}+\sqrt{h^2+x_2^2}\right)\geqslant\sqrt{h^2+\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^2}. \tag{1.12}$$

上面已举了八个不等式的例子. 现在，我们静心分析一下，立刻发现一个规律：

在(1)中，令 $f(x)=-\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$，当 $0\leqslant x_1,\ x_2\leqslant\pi$ 时，有

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right). \tag{1.13}$$

在(2)中，令 $f(x)=-\lg x(x>0)$，也有不等式(1.13)，唯一不同之处是以 $x_1>0$ 和 $x_2>0$ 代替 $0\leqslant x_1,\ x_2\leqslant\pi$. 在(3)到(8)中，分别令 $f(x)=x^p\ (x>0,\ p$ 是自然数)，$f(x)=-\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)=\operatorname{tg}x\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)=\operatorname{ctg}x\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)=\lg(1+10^x)$ (x 是实数)和 $f(x)=\sqrt{h^2+x^2}$ (h 是一个正常数，x 是实数)，同样有不等式(1.13)，只不过 x_1、x_2 的变化范围有所不同. 从(1)到(8)还可以看出，当且仅当 $x_1=x_2$ 时，(1.13)变为等式. 这就是我们的发现.

许多函数满足不等式(1.13)，当然自变量 x 的定义域可能各不相同. 在这个基础上加以抽象，就得到本书所要介绍的凸函数不等式. 它是丹麦数学家琴生(Jensen, 1859 年—1925 年)在 1905 年和 1906 年所建立的，所以又称这些不等式为琴生不等式. 我们把满足不等式(1.13)(等号成立当且仅当 $x_1=x_2$) 的函数 $f(x)$ 称为某个定义域区间内的凸函数. 例如，对于(1)，我们就讲 $f(x)=-\sin x$ 是闭区间 $[0,\ \pi]$ 内的凸函数；对于(2)，我们讲 $f(x)=-\lg x$ 是开区间 $(0,\ \infty)$ (这表明 $x>0$，∞ 称无穷大)内的凸函数，等等.

下面我们再举几个凸函数的例子.

(9) $f(x)=-\sqrt{x}$ (x 是正实数).

x_1, x_2 是正实数, 利用不等式(1.2), 有

$$\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}\leqslant\frac{1}{4}(x_1+x_2),$$

于是,

$$\left[\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\right]^2=\frac{1}{4}(x_1+2\sqrt{x_1x_2}+x_2)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2).$$

两边开方, 并且两端乘以 -1, 有

$$-\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\geqslant-\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)},$$

(等号成立, 当且仅当 $x_1=x_2$)

所以 $f(x)=-\sqrt{x}$ 是 $(0, \infty)$ 内的一个凸函数.

(10) $f(x)=\lg\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(0<x\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

当 $0<x_1,\ x_2\leqslant\frac{1}{2}$ 时,

$$\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{x_2}-1\right)-\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right)^2$$

$$=\frac{1}{x_1x_2}-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}-\frac{4}{(x_1+x_2)^2}+\frac{4}{x_1+x_2}$$

$$=\frac{1}{x_1x_2(x_1+x_2)^2}(x_1-x_2)^2(1-x_1-x_2)\geqslant 0.$$

移项后, 两边取对数, 有

$$\frac{1}{2}\left[\lg\left(\frac{1}{x_1}-1\right)+\lg\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\right]$$

$$\geqslant\lg\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right), \tag{1.14}$$

所以，$f(x)=\lg\left(\frac{1}{x}-1\right)$是半开半闭区间$\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$内的凸函数((1.14)等号成立，当且仅当 $x_1=x_2$).

(11) $f(x)=\left(x+\frac{a}{x}\right)^p$ (p 是自然数，a 是正常数，$x>0$).

我们对 p 用数学归纳法，证明下述不等式：当 $x_1>0$ 和 $x_2>0$,

$$\frac{1}{2}\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)^p+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)^p\right]$$
$$\geqslant\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{2a}{x_1+x_2}\right]^p. \tag{1.15}$$

当 $p=1$ 时，利用熟知的关系式：

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\geqslant\frac{4}{x_1+x_2}, \tag{1.16}$$

有

$$\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}+x_2+\frac{a}{x_2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{a}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{2a}{x_1+x_2}. \tag{1.17}$$

假设当 $p=k$ 时，(1.15)成立，考虑 $p=k+1$ 情况，

$$\frac{1}{2}\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)^{k+1}+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)^{k+1}\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)\right]$$
$$\cdot\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)^k+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)^k\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)\right]$$
$$\cdot\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)^k-\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)^k\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)\right]$$

$$\cdot\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)^k+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)^k\right]$$

$$\geqslant\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{2a}{x_1+x_2}\right]$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{2a}{x_1+x_2}\right]^k$$

(利用不等式(1.17)和归纳法假设)

$$=\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{2a}{x_1+x_2}\right]^{k+1}, \tag{1.18}$$

所以，(1.15)对任意自然数p成立，而且等号成立，当且仅当$x_1=x_2$. 函数$f(x)=\left(x+\frac{a}{x}\right)^p$($p$是自然数，$a$是正常数)是$(0, \infty)$内的凸函数.

(12) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $(0<x<1)$，我们来证明它也是一个凸函数. 对于$0<x_1, x_2<1$，令$\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}=t_i$ $(i=1, 2)$，于是$t_i>1$，且$x_i=1-\frac{1}{t_i^2}$.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}}$$

$$=\frac{1}{2}(t_1+t_2)-\frac{\sqrt{2}\,t_1t_2}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}} \tag{1.19}$$

显然，

$$\frac{1}{2}(t_1+t_2)\geqslant\sqrt{t_1t_2}, \quad \sqrt{t_1^2+t_2^2}\geqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{t_1t_2}.$$

那么，(1.19)右边非负. 因而，我们有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}},$$

(1.20)

等号成立，当且仅当 $x_1=x_2$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 是(0, 1)内的一个凸函数.

(13) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}(0<x<1)$. 我们证明这个 $f(x)$ 在(0, 1)内也是一个凸函数. 取(0, 1)内两个实数 x_1, x_2. 不妨设 $x_1\geqslant x_2$, 显然

$$(x_1-x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}-\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\right)\geqslant 0,$$

因而，有

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\right).$$

利用上述结果，有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{4}(x_1+x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\right)$$
$$\geqslant\frac{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\sqrt{1-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}}. \text{（利用(1.20)）} \qquad (1.21)$$

显然，不等式(1.21)取等号时，上述推导过程中一切不等式都应取等号，那么必有 $x_1=x_2$. 当然 $x_1=x_2$ 使(1.21)变成等式.

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ 是(0, 1)区间内的凸函数。

现在，我们向读者介绍一个有用的函数

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}. \quad \left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \tag{1.22}$$

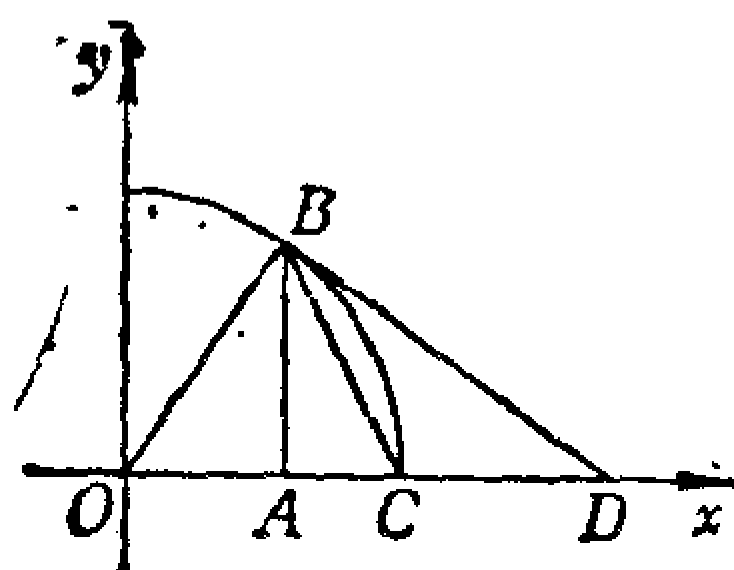


图 1

作一个半径为1的圆（单位圆），取圆心 O 为坐标原点，取第一象限（见图1）. 令 $\angle COB=x$, 并作 BA 垂直于 OC（即 x 轴）. 则 $AB=\sin x$. 过点 B 作圆 O 的切线，交 x 轴于 D. 用 S 表示面积，显然

$$S_{\triangle COB}<S_{\text{扇形}COB}<S_{\triangle DOB}, \tag{1.23}$$

因而，有

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x, \tag{1.24}$$

这导出一个简单，然而重要的不等式：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$,

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x. \tag{1.25}$$

从(1.25)，有

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \tag{1.26}$$

我们知道，当 x 趋向于0时，$\cos x$ 趋向于1. 所以，从(1.26)知道，当 x 趋向于0时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 必定趋向于1. 用极限语言来表达，就是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1.27}$$

下面证明，由(1.22)定义的函数 $f(x)$ 是单调递降函数，就是说，当 $0<x<y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $f(y)<f(x)$.

由于 $y-x>0$, 把 $y-x$ 作 n 等分(n 是自然数). 令

$$\Delta x=\frac{1}{n}(y-x). \tag{1.28}$$

我们要证明, 当 n 很大时, 对于 $[x, y)$ 内实数 x^*, 如果 $x^*+\Delta x \leqslant y$, 必有

$$f(x^*+\Delta x)<f(x^*). \tag{1.29}$$

如果(1.29)成立, 令 $x^*=x, x+\Delta x, x+2\Delta x, \cdots, x+(n-1)\Delta x$, 就有

$$\begin{aligned}&f(x)>f(x+\Delta x)>f(x+2\Delta x)>f(x+3\Delta x)\\&\quad>\cdots>f(x+(n-1)\Delta x)>f(x+n\Delta x)\\&\quad=f(y).\end{aligned} \tag{1.30}$$

现在证明(1.29).

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta x}[f(x^*+\Delta x)-f(x^*)]\\&=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\sin(x^*+\Delta x)}{x^*+\Delta x}-\frac{\sin x^*}{x^*}\right]\\&=\frac{1}{\Delta x x^*(x^*+\Delta x)}[x^*\sin(x^*+\Delta x)\\&\quad-(x^*+\Delta x)\sin x^*]\\&=\frac{1}{\Delta x(x^*+\Delta x)}[\sin(x^*+\Delta x)-\sin x^*]\\&\quad-\frac{\sin x^*}{x^*(x^*+\Delta x)}\\&=\frac{\cos\left(x^*+\frac{1}{2}\Delta x\right)}{x^*+\Delta x}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}-\frac{\sin x^*}{x^*(x^*+\Delta x)}.\end{aligned} \tag{1.31}$$

当 Δx 趋向于 0 时, $x^*+\Delta x$ 趋向于 x^*, $\cos\left(x^*+\frac{1}{2}\Delta x\right)$

趋向于 $\cos x^*$，而由(1.27)知道

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}=1$$

(用 $\frac{1}{2}\Delta x$ 代替(1.27)中 x)．那么，当 Δx 趋向于 0 时，(1.31)的右端趋向于

$$\frac{\cos x^*}{x^*}-\frac{\sin x^*}{x^{*2}}=\frac{\cos x^*}{x^{*2}}(x^*-\operatorname{tg} x^*)<0$$

(利用(1.25))．

从上面分析可以知道，当 Δx 很小时，换句话说，n 很大时，必有

$$\frac{1}{\Delta x}[f(x^*+\Delta x)-f(x^*)]<0. \tag{1.32}$$

由于 $\Delta x>0$，因而(1.29)成立．$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 是半开半闭区间 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 内的一个单调递降函数．

这个函数的单调递降性质非常重要．取自然数 $n\geqslant 3$，立刻有不等式

$$f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)>f\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{1.33}$$

于是有

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}}>\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}},$$

即

$$(n+1)\sin\frac{\pi}{n+1}>n\sin\frac{\pi}{n}. \tag{1.34}$$

从不等式(1.34)可以推出一个几何结论．

我们在半径为 R 的圆内作一个内接正 n 边形，一个内接正 $n+1$ 边形，正 n 边形周长是 $2nR\sin\frac{\pi}{n}$，正 $n+1$ 边形周长是 $2(n+1)R\sin\frac{\pi}{n+1}$. 由不等式(1.34)，立刻有一个几何结论：

半径相同的圆内接正 $n+1$ 边形周长大于圆内接正 n 边形周长 $(n\geqslant 3)$.

现在我们要证明

(14) $f(x)=-\lg\frac{\sin x}{x}\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$是一个凸函数.

取 $0<x_1$, $x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$，我们断言：

$$\frac{\sin x_1}{x_1}\cdot\frac{\sin x_2}{x_2}\leqslant\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}\right]^2, \qquad (1.35)$$

而且等号成立，当且仅当 $x_1=x_2$.

我们需要比在(6)中更精确的计算.

$$\begin{aligned}\sin x_1\sin x_2&=\frac{1}{2}[-\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)]\\&=\frac{1}{2}[1-\cos(x_1+x_2)-1+\cos(x_1-x_2)]\\&=\sin^2\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\sin^2\frac{1}{2}(x_1-x_2).\end{aligned} \qquad (1.36)$$

利用上式，有

$$\begin{aligned}&\frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1x_2}\sin x_1\sin x_2\\&=\frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1x_2}\left[\sin^2\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\sin^2\frac{1}{2}(x_1-x_2)\right]\end{aligned}$$

$$=\sin^2\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4x_1x_2}\Big[(x_1-x_2)^2\cdot\sin^2\frac{1}{2}$$

$$\cdot(x_1+x_2)-(x_1+x_2)^2\sin^2\frac{1}{2}(x_1-x_2)\Big]. \qquad (1.37)$$

如果 $x_1=x_2$，上式右边第二大项是0. 如果 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1>x_2$，由于现在知道 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$内是单调递降函数，所以，有

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}<\frac{\sin\frac{1}{2}(x_1-x_2)}{\frac{1}{2}(x_1-x_2)},$$

即

$$(x_1-x_2)\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)<(x_1+x_2)\sin\frac{1}{2}(x_1-x_2). \qquad (1.38)$$

结合(1.37)和(1.38)，有

$$\frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1x_2}\sin x_1\sin x_2<\sin^2\frac{1}{2}(x_1+x_2). \qquad (1.39)$$

所以，我们有

$$\frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1x_2}\sin x_1\sin x_2\leqslant\sin^2\frac{1}{2}(x_1+x_2), \qquad (1.40)$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2$. (1.35) 的确成立.

对不等式(1.35)两边取对数，并且两端乘以 -1，有

$$-\frac{1}{2}\left[\lg\frac{\sin x_1}{x_1}+\lg\frac{\sin x_2}{x_2}\right]\geqslant-\lg\frac{\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}. \qquad (1.41)$$

$$f(x)=-\lg\frac{\sin x}{x}$$

在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$内是一个凸函数.

类似地，我们可以考虑函数

$$f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{x},\tag{1.42}$$

这里$0<x<\frac{\pi}{2}$. 下面证明这个$f(x)$是单调递增的函数.

完全类似(1.29)的证明(x^*, Δx的意义同(1.28), (1.29)), 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta x}[f(x^*+\Delta x)-f(x^*)]&=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\operatorname{tg}(x^*+\Delta x)}{x^*+\Delta x}-\frac{\operatorname{tg} x^*}{x^*}\right]\\&=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\sin(x^*+\Delta x)}{(x^*+\Delta x)\cos(x^*+\Delta x)}-\frac{\sin x^*}{x^*\cos x^*}\right]\\&=\frac{1}{x^*\Delta x(x^*+\Delta x)\cos x^*\cos(x^*+\Delta x)}\\&\quad\times[x^*\sin(x^*+\Delta x)\cos x^*-x^*\sin x^*\cos(x^*+\Delta x)\\&\quad-\Delta x\sin x^*\cos(x^*+\Delta x)]\\&=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{(x^*+\Delta x)\cos x^*\cos(x^*+\Delta x)}\\&\quad-\frac{\sin x^*}{x^*(x^*+\Delta x)\cos x^*}.\end{aligned}\tag{1.43}$$

利用前面的知识，当Δx趋向于0时，上式右端趋向于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^*\cos^2 x^*}-\frac{\sin x^*}{x^{*2}\cos x^*}\\&\quad=\frac{1}{x^*\cos^2 x^*}\left(1-\frac{\sin x^*}{x^*}\cos x^*\right)>0\end{aligned}$$

$\left(\text{利用 } 0<\frac{\sin x^*}{x^*}<1,\ \text{和 } 0<\cos x^*<1\right)$.

由此，我们知道$f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$是$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$内的一个单调递增函数.

特别地，我们有$f\left(\dfrac{\pi}{n}\right)>f\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ ($n\geqslant 3$, n是自然数)，这导致不等式

$$n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}>(n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+1}. \tag{1.44}$$

从(1.44)也可以推导出一个几何结论：

在半径为R的圆上作一个外切正n边形，和一个外切正$n+1$边形. 这外切正n边形周长是$2nR\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$，这外切正$n+1$边形周长是$2(n+1)R\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n+1}$. 从(1.44)，我们有下述几何结论：

半径相同的圆的外切正n边形周长大于外切正$n+1$边形周长($n\geqslant 3$).

利用$f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$在开区间$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$的单调递增性质，我们可以证明

(15) $f(x)=\lg \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$是$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$内的一个凸函数.

为此，我们需要证明：当$0<x_1,\ x_2<\dfrac{\pi}{2}$时，有

$$\frac{\operatorname{tg} x_1}{x_1}\cdot\frac{\operatorname{tg} x_2}{x_2}\geqslant\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}\right]^2. \tag{1.45}$$

等号成立，当且仅当$x_1=x_2$.

首先，

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(x_1-x_2)$$

$$=\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1-x_2)\right]$$

$$\cdot\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1-x_2)\right]$$

$$=\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\frac{\sin\frac{1}{2}(x_1-x_2)}{\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)}\right]$$

$$\cdot\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)}-\frac{\sin\frac{1}{2}(x_1-x_2)}{\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)}\right]$$

$$=\frac{\sin x_1}{\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)}$$

$$\cdot\frac{\sin x_2}{\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)}$$

$$=\frac{\sin x_1\sin x_2}{\cos^2\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos^2\frac{1}{2}(x_1-x_2)}$$

$$=\frac{4\sin x_1\sin x_2}{(\cos x_1+\cos x_2)^2}$$

$$\leqslant\frac{\sin x_1\sin x_2}{\cos x_1\cos x_2}$$

（利用 $(\cos x_1+\cos x_2)^2\geqslant 4\cos x_1\cos x_2$）

$$=\operatorname{tg}x_1\operatorname{tg}x_2. \tag{1.46}$$

要证明(1.45)，不妨设 $x_1\geqslant x_2$，于是，利用(1.46)，有

$$\frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1x_2}\operatorname{tg}x_1\operatorname{tg}x_2 \geqslant \frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1x_2}$$

$$\times\left[\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(x_1-x_2)\right]$$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4x_1x_2}$$

$$\times\left[(x_1-x_2)^2\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right.$$

$$\left.-(x_1+x_2)^2\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(x_1-x_2)\right]. \qquad (1.47)$$

当 $x_1=x_2$ 时，上式右端第二大项是 0；当 $x_1>x_2$ 时，利用 $f(x)=\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ 在开区间 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内是单调递增函数，有

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}>\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1-x_2)}{\frac{1}{2}(x_1-x_2)}. \qquad (1.48)$$

于是，

$$(x_1-x_2)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1+x_2)>(x_1+x_2)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1-x_2). \qquad (1.49)$$

结合 (1.49) 和 (1.47)，当 $x_1>x_2$ 时，有

$$\frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1x_2}\operatorname{tg}x_1\operatorname{tg}x_2>\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(x_1+x_2). \qquad (1.50)$$

于是 (1.45) 成立．对 (1.45) 两边取对数，有

$$\frac{1}{2}\left[\lg\frac{\operatorname{tg}x_1}{x_1}+\lg\frac{\operatorname{tg}x_2}{x_2}\right]\geqslant\lg\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_1+x_2)}{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}. \qquad (1.51)$$

从上面的推导过程可以看出，(1.51) 取等号当且仅当 $x_1=x_2$.

因而$f(x)=\lg\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$是开区间$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$内的一个凸函数.

到目前为止，我们已举了十五个凸函数的例子. 不等式(1.13)能否推广到具有n个实数x_1, x_2, …, x_n的情况? 这是我们关心的一个问题. 下面的定理回答了这个问题.

定理(Jensen 不等式) $f(x)$是开区间$(a,\ b)$(这里a可以是$-\infty$, b也可以是∞)内一个凸函数，那么，对于$(a,\ b)$内任意n个实数x_1, x_2, …, x_n, 有

$$\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$$
$$\geqslant f\left(\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right).$$

等号成立当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$.

注：$(a,\ b)$也可以被$[a,\ b]$或$(a,\ b]$等代替.

证明 对n用数学归纳法. 当$n=1$时，Jensen 不等式左、右两边都是$f(x_1)$, Jensen 不等式当然成立.

假设$n=k$时，定理(Jensen 不等式)成立. 考虑$n=k+1$情况. 记

$$A=\frac{1}{k+1}(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}), \tag{1.52}$$

显然，

$$\begin{aligned}A&=\frac{2kA}{2k}=\frac{(k+1)A+(k-1)A}{2k}\\&=\frac{1}{2k}[x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+(k-1)A]\\&=\frac{1}{2k}(x_1+x_2+\cdots+x_k)+\frac{1}{2k}[x_{k+1}+(k-1)A].\end{aligned} \tag{1.53}$$

又记

$$B=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\cdots+x_k),$$

$$C=\frac{1}{k}[x_{k+1}+(k-1)A], \tag{1.54}$$

A、B 和 C 仍是(a, b)内实数，利用凸函数性质，有

$$f(A)=f\left(\frac{1}{2}(B+C)\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(B)+f(C)]. \tag{1.55}$$

利用归纳法假设，有

$$f(B)\leqslant\frac{1}{k}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)],$$

$$f(C)\leqslant\frac{1}{k}[f(x_{k+1})+f(A)+\cdots+f(A)]\ (k-1\text{个}f(A))$$

$$=\frac{1}{k}[f(x_{k+1})+(k-1)f(A)]. \tag{1.56}$$

将(1.56)(两个不等式)代入(1.55)，有

$$f(A)\leqslant\frac{1}{2k}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})+(k-1)f(A)].$$

于是，上式两边乘以 $2k$，可以得到

$$f(A)\leqslant\frac{1}{k+1}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})], \tag{1.57}$$

Jensen 不等式当 $n=k+1$ 时成立，所以 Jensen 不等式是正确的.

当 $f(A)=\frac{1}{k+1}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})]$ 时，上面一切不等式都应取等号，所以依照归纳法假设，有 $x_1=x_2=\cdots=x_k$，$A=x_{k+1}$. 从(1.52)A 的定义和 $x_1=x_2=\cdots=x_k$，有 $x_{k+1}=x_1=x_2=\cdots=x_k$. 当 $n=k+1$ 时，定理成立，所

以定理(Jensen 不等式)得证.

把开区间(a, b)全部换成$[a, b]$或$(a, b]$，显然定理仍然成立.

根据定理(Jensen 不等式)，我们立即可以把前面十五个不等式加以推广.

例 1 当$0\leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n\leqslant\pi$时

$$\frac{1}{n}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n)$$

$$\leqslant\sin\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n). \quad (1.58)$$

例 2 $x_1, x_2, \cdots, x_n$全是正实数时,

$$-\frac{1}{n}(\lg x_1+\lg x_2+\cdots+\lg x_n)$$

$$\geqslant -\lg\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

于是，有

$$\frac{1}{n}\lg(x_1x_2\cdots x_n)\leqslant\lg\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n). \quad (1.59)$$

习惯上，记

$$A_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n), \quad G_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}. \quad (1.60)$$

A_n称为n个正实数的算术平均值，G_n称为n个正实数的几何平均值. $A_n\geqslant G_n$. 又记

$$H_n=\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}, \quad (1.61)$$

H_n称为n个正实数的调和平均值. 在不等式(1.59)中用

$\frac{1}{x_1}$代替 x_1，$\frac{1}{x_2}$ 代替 x_2，…，$\frac{1}{x_n}$ 代替 x_n，有

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right).$$

从而可以得到

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}. \tag{1.62}$$

结合(1.59)和(1.62)，有

$$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n. \tag{1.63}$$

利用 $H_n\leqslant A_n$，可以推出一个非常有用的不等式

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2. \tag{1.64}$$

当然，这里 x_1，x_2，…，x_n 全是正实数.

例 3 当 p 是自然数，x_1，x_2，…，x_n 全是正实数时，

$$\frac{1}{n}(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)\geqslant\left[\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]^p,$$

即

$$\left[\frac{1}{n}(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)\right]^{\frac{1}{p}}\geqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n). \tag{1.65}$$

特别当 $p=2$ 时，有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\leqslant n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2). \tag{1.66}$$

例 4 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x_1$，$x_2$，…，$x_n\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\frac{1}{n}(\cos x_1+\cos x_2+\cdots+\cos x_n)$$
$$\leqslant\cos\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n). \tag{1.67}$$

例 5 当 $0 \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n < \frac{\pi}{2}$ 时，

$$\frac{1}{n}(\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \cdots + \operatorname{tg} x_n) \geqslant \operatorname{tg} \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n). \tag{1.68}$$

例 6 当 $0 < x_1, x_2, \cdots, x_n \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，

$$\frac{1}{n}(\operatorname{ctg} x_1 + \operatorname{ctg} x_2 + \cdots + \operatorname{ctg} x_n) \geqslant \operatorname{ctg} \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n). \tag{1.69}$$

例 7 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是任意实数，

$$\frac{1}{n}[\lg(1+10^{x_1}) + \lg(1+10^{x_2}) + \cdots + \lg(1+10^{x_n})] \geqslant \lg[1+10^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}],$$

于是，

$$\sqrt[n]{(1+10^{x_1})(1+10^{x_2})\cdots(1+10^{x_n})} \geqslant 1+10^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}. \tag{1.70}$$

对于 $2n$ 个正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 我们一定能找到 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得

$$10^{x_1} = \frac{b_1}{a_1}, \quad 10^{x_2} = \frac{b_2}{a_2}, \quad \cdots, \quad 10^{x_n} = \frac{b_n}{a_n},$$

代入(1.70)，并且在不等式两端同乘以 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，有

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}. \tag{1.71}$$

容易知道，当且仅当 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$, (1.71)等号成立.

例 8 h 是正常数，x_1, x_2, $\cdots$, x_n 全是实数，

$$\frac{1}{n}(\sqrt{h^2+x_1^2}+\sqrt{h^2+x_2^2}+\cdots+\sqrt{h^2+x_n^2})$$
$$\geqslant\sqrt{h^2+\left[\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]^2}. \qquad (1.72)$$

例 9 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 是 n 个正实数，

$$\frac{1}{n}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}. \qquad (1.73)$$

请读者想一想，不等式(1.66)和(1.73)有什么关系?

例 10 当 $0<x_1, x_2, \cdots, x_n\leqslant\frac{1}{2}$ 时，

$$\frac{1}{n}\left[\lg\left(\frac{1}{x_1}-1\right)+\lg\left(\frac{1}{x_2}-1\right)+\cdots+\lg\left(\frac{1}{x_n}-1\right)\right]$$
$$\geqslant\lg\left(\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}-1\right).$$

于是，我们有

$$\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{x_n}-1\right)$$
$$\geqslant\left(\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}-1\right)^n. \qquad (1.74)$$

例 11 p 是自然数，a 是正常数，x_1, x_2, $\cdots$, x_n 是正实数，

$$\frac{1}{n}\left[\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)^p+\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)^p+\cdots+\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)^p\right]$$
$$\geqslant\left[\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\frac{na}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right]^p. \quad (1.75)$$

例 12 当 $0<x_1, x_2, \cdots, x_n<1$ 时:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}}. \tag{1.76}$$

例 13 当 $0<x_1, x_2, \cdots, x_n<1$ 时,

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\right)$$

$$\geqslant\frac{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{\sqrt{1-\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}}. \tag{1.77}$$

例14 当 $0<x_1, x_2, \cdots, x_n\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,

$$-\frac{1}{n}\left[\lg\frac{\sin x_1}{x_1}+\lg\frac{\sin x_2}{x_2}+\cdots+\lg\frac{\sin x_n}{x_n}\right]$$

$$\geqslant\ \lg\frac{\sin\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)},$$

于是,有

$$\frac{\sin x_1}{x_1}\cdot\frac{\sin x_2}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{\sin x_n}{x_n}$$

$$\leqslant\left[\frac{\sin\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\right]^n. \tag{1.78}$$

类似上例,从(15),有

例 15 当 $0<x_1, x_2, \cdots, x_n<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{\operatorname{tg} x_1}{x_1}\cdot\frac{\operatorname{tg} x_2}{x_2}\cdots\frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n}$$

$$\geqslant\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\right]^n \tag{1.79}$$

此外，我们要指出，从不等式(1.64)可以得到：当 $-\frac{\pi}{2}<x_1, x_2, \cdots, x_n<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$(\cos x_1+\cos x_2+\cdots+\cos x_n)\cdot(\sec x_1+\sec x_2+\cdots+\sec x_n)\geqslant n^2,$$

再利用例 4，有

$$\frac{1}{n}(\sec x_1+\sec x_2+\cdots+\sec x_n)\geqslant\sec\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n). \tag{1.80}$$

同理，从不等式(1.64)及例 1，有

$$\frac{1}{n}(\csc x_1+\csc x_2+\cdots+\csc x_n)\geqslant\csc\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n). \tag{1.81}$$

这里 $0<x_1, x_2, \cdots, x_n<\pi$. 这样，我们又多了两个凸函数.

在数学知识的汪洋大海中，凸函数理论宛如汇入大海的一条清澈见底的小溪. 我希望读者会喜爱它.

习 题 一

1. 从例 1 是否可直接推出例 4. 从例 5 是否可直接推出例 6.

$\left(\right.$提示：在例 1 中用 $\frac{\pi}{2}-x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$代替 x. $\left.\right)$

2. a, b 是两个固定常数，当 $a<x_1, x_2<b$ 时，已知正函数 $f(x)$ 满足不

等式$f(x_1)f(x_2)\geqslant\left[f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)\right]^2$，求证：当$a<x, x_1, \cdots, x_n<b$时，有$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\geqslant\left[f\left(\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right)\right]^n$.

(提示：$\lg f(x)$是一个凸函数.)

3. 在$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$内考虑函数$f(x)=x\cos x$，它是不是单调函数，请证明你的断言.

$\Big($提示：类似(1.31)，估计$\frac{1}{\Delta x}[f(x+\Delta x)-f(x)]$. $\Big)$

4. 请举一个凸函数的例子(不同于第一节内的例子).

5. 已知$a_1, a_2, \cdots, a_n$是n个正实数，满足$a_1a_2\cdots a_n=1$，

求证：$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n$.

(提示：利用第一节内不等式(1.71).)

6. 已知$x_1, x_2, \cdots, x_n$，是n个正实数，$p>0$. 求证：

$$\left(1+\frac{1}{x_1^p}\right)\left(1+\frac{1}{x_2^p}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_n^p}\right)\geqslant\left[1+\left(\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right)^p\right]^n.$$

(提示：利用本节内不等式(1.71)和$A_n\geqslant G_n$.)

7. 已知正实数a, b, c满足条件$a+b+c=1$，求证：

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant\sqrt{21}.$$

(提示：注意本节例9.)

8. 设$a_i(1\leqslant i\leqslant n)$是非负实数，而且$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，

求证：$n-1\leqslant\sqrt{1-a_1}+\sqrt{1-a_2}+\cdots+\sqrt{1-a_n}\leqslant\sqrt{(n-1)n}$.

(提示：$1-a_i\leqslant\sqrt{1-a_i}(1\leqslant i\leqslant n)$，并注意本节例9.)

9. $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$全是正实数，已知$x_1+y_1\leqslant z_1$，$x_2+y_2\leqslant z_2$，

求证：$\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{y_1y_2}\leqslant\sqrt{z_1z_2}$.

(提示：利用本节不等式(1.71).)

10. $0<x<1$，p, q是自然数，求证：$x^p(1-x)^q<\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}$.

$\Big($提示：考虑乘积$\frac{q}{p}x\cdots\frac{q}{p}x\cdot(1-x)\cdots(1-x)$，其中共含$p$个$\frac{q}{p}x$和$q$个$(1-x)$，并利用$G_{p+q}\leqslant A_{p+q}$. $\Big)$

11. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$都是正实数，而且$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，

求证：$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2$

$$\geqslant\frac{1}{n}(n^2+1)^2.$$

（提示：利用例11($a=1$, $p=2$)。）

12. 已知$0<b\leqslant a$，求证：$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a}\leqslant\frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$.

13. 自然数$n\geqslant2$，求证：$n^{\frac{1}{2}n}<1\cdot2\cdot3\cdots n<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

（提示：利用$G_n\leqslant A_n$和$(n+1-k)k>n(k=2, 3, \cdots, n-1)$。）

14. p是负整数，$x>0$和$y>0$，求证：$\left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{2}(x+y)$.

（提示：利用(3)知道$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{-p}+\left(\frac{1}{y}\right)^{-p}\right]\geqslant\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]^{-p}\geqslant\left(\frac{2}{x+y}\right)^{-p}$.）

15. 已知$x_1, x_2, \cdots, x_n$是n个实数，$A_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，实数$x>x_j(1\leqslant j\leqslant n)$，求证：$(x-A_n)^n\geqslant(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$.

（提示：两边取对数，并且利用$f(y)=-\lg y(y>0)$是凸函数。）

16. 已知a, b, c和d是实数，满足$a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$，求证：

$$-\frac{1}{4}\leqslant abcd\leqslant\frac{1}{4}.$$

（提示：利用$4|abcd|\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$。）

17. 已知a, b, c是正实数，而且满足$ab+bc+ca\geqslant2$，

求证：$a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{3}{2}$.

（提示：利用$A_3\geqslant G_3$，有$a^3+b^3+1\geqslant3ab$, $a^3+c^3+1\geqslant3ac$, $b^3+c^3+1\geqslant3bc$，然后相加。）

18. $0<a, b, c<1$. 求证：三个正实数$a(1-b)$, $b(1-c)$和$c(1-a)$不全大于$\frac{1}{4}$.

（提示：对这三数的乘积利用$G_6\leqslant A_6$。）

19. $a_1, a_2, \cdots a_n$是n个正实数，求证：

$$(a_1^2+a_1+1)(a_2^2+a_2+1)\cdots(a_n^2+a_n+1)\geqslant3^na_1a_2\cdots a_n.$$

(提示．利用 $a_i+\frac{1}{a_i}+1\geqslant 3(1\leqslant i\leqslant n)$．)

20．a．b，c 是正实数，求证：$(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)\leqslant abc$．

(提示：令 $a+b-c=x$，$c+a-b=y$，$b+c-a=z$，再利用 $A_2\geqslant G_2$．)

二　琴生不等式的代数应用

这一节，我们讲琴生不等式在代数上的一些应用.

因为下面经常要和 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的和打交道，为方便起见，我们引进求和记号 Σ（读作“西格玛”）.

我们把和式 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 写成 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$，这里 a_i 表示一般项，Σ 上、下的数字表示 i 从 1 加到 n，i 称为求和指标，只起辅助作用，也可以换成别的字母，例如和式 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 也可写成 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$，或写成 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 等等.

在讲述大量有趣的不等式前，我们先给出 Jensen 不等式的一个简单推广，以便应用.

如果 $f(x)$ 是开区间 (a, b)（或闭区间 $[a, b]$ 等）上的一个函数，x_0 是 (a, b) 内任意一个实数，如果 x 趋向于 x_0 时，必有 $f(x)$ 趋向于确定值 $f(x_0)$，那么，我们就称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是一个连续函数.

第一节内所提到的函数全是连续函数. 例如 $f(x)=\operatorname{tg} x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是一个连续函数，$f(x)=-\lg x$ 在 $(0, \infty)$ 内是一个连续函数，等等.

对于连续的凸函数 $f(x)$，我们有下述

定理（加权的 Jensen 不等式）　$f(x)$ 是开区间 (a, b)（或闭区间 $[a,b]$ 等）内的一个连续凸函数，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 n 个

正实数，$a<x_1, x_2, \cdots, x_n<b$（或 $a\leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n\leqslant b$）．则

$$\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}[p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)]$$
$$\geqslant f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right).$$

注：当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=1$ 时，就是 Jensen 不等式．

证明 当 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 全是正有理数时，我们可以写 $p_i=\frac{m_i}{t_i}$ m_i，t_i 全是自然数（即正整数），$1\leqslant i\leqslant n$）．于是，

$$\frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$
$$=\frac{m_1t_2\cdots t_nf(x_1)+t_1m_2t_3\cdots t_nf(x_2)+\cdots+t_1t_2\cdots t_{n-1}m_nf(x_n)}{m_1t_2\cdots t_n+t_1m_2t_3\cdots t_n+\cdots+t_1t_2\cdots t_{n-1}m_n}$$
$$\geqslant f\left(\frac{m_1t_2\cdots t_nx_1+t_1m_2t_3\cdots t_nx_2+\cdots+t_1t_2\cdots t_{n-1}m_nx_n}{m_1t_2\cdots t_n+t_1m_2t_3\cdots t_n+\cdots+t_1t_2\cdots t_{n-1}m_n}\right)$$

（这里利用 Jensen 不等式，有 $m_1t_2\cdots t_n$ 个 $f(x_1)$，$t_1m_2t_3\cdots t_n$ 个 $f(x_2)$，$\cdots$，$t_1t_2\cdots t_{n-1}m_n$ 个 $f(x_n)$．）

$$=f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right).$$

对于正实数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，我们知道：对于某个 $p_i(1\leqslant i\leqslant n)$，有正有理数列 $p_{ij}^*(j=1, 2, \cdots)$，当 j 越来越大时，p_{ij}^* 趋向于 p_i．

对于 p_{ij}^*（j 固定），有加权的 Jensen 不等式（上面已证）：

$$\frac{p_{1j}^*f(x_1)+p_{2j}^*f(x_2)+\cdots+p_{nj}^*f(x_n)}{p_{1j}^*+p_{2j}^*+\cdots+p_{nj}^*}$$
$$\geqslant f\left(\frac{p_{1j}^*x_1+p_{2j}^*x_2+\cdots+p_{nj}^*x_n}{p_{1j}^*+p_{2j}^*+\cdots+p_{nj}^*}\right).$$

当 j 越来越大时，上面不等式左边趋向于

$$\frac{p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)+\cdots+p_n f(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n},$$

而 $\dfrac{p_{1j}^* x_1+p_{2j}^* x_2+\cdots+p_{nj}^* x_n}{p_{1j}^*+p_{2j}^*+\cdots+p_{nj}^*}$ 趋向于 $\dfrac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$.

利用 f 的连续性，可知上面不等式右边趋向于

$$f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right).$$

所以，两端取极限后，有

$$\frac{p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)+\cdots+p_n f(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$
$$\geqslant f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right).$$

现在，我们介绍一些例子.

例 1 （许尔(Schur)不等式）设 n^2 个非负实数 $a_{ij}(1\leqslant i, j\leqslant n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}=1$ 和 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}=1$, $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是 n 个非负实数，$y_i=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k(1\leqslant i\leqslant n)$，求证：$y_1y_2\cdots y_n\geqslant x_1x_2\cdots x_n$.

注：条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}=1(1\leqslant j\leqslant n)$ 是 n 个条件等式，$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}=1(1\leqslant i\leqslant n)$ 也是 n 个条件等式.

证明 如果 x_k 中有一个为 $0(1\leqslant k\leqslant n)$，不等式显然成立，考虑 x_k 全是正数情况，由于函数 $f(x)=-\lg x(x>0)$ 是连续的凸函数，因此利用加权的 Jensen 不等式，有

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lg x_j=-\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\lg x_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}}\geqslant -\lg\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}}$$
$$=-\lg y_i.$$

所以，有

$$y_i\geqslant x_1^{a_{i1}}x_2^{a_{i2}}\cdots x_n^{a_{in}}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

将上面所得的 n 个不等式相乘，有

$$y_1y_2\cdots y_n \geqslant (x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\cdots x_n^{a_{1n}})(x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\cdots x_n^{a_{2n}})$$
$$\cdots(x_1^{a_{n1}}x_2^{a_{n2}}\cdots x_n^{a_{nn}})$$
$$= x_1^{\sum_{j=1}^{n} a_{j1}} x_2^{\sum_{j=1}^{n} a_{j2}} \cdots x_n^{\sum_{j=1}^{n} a_{jn}}$$
$$= x_1x_2\cdots x_n. \tag{2.1}$$

Schur 不等式有一个有趣的应用，这就是例 2.

例 2 设有 n 个非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，$x_l = a_l + \frac{n-3}{n-1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - a_l\right)$（$1\leqslant l\leqslant n$，自然数 $n\geqslant 3$）．求证：$x_1x_2\cdots x_n \geqslant (a_2 + a_3 + \cdots + a_n - a_1)(a_1 + a_3 + \cdots + a_n - a_2)\cdots(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - a_n)$.

注：例 2 原是国内一数学杂志上一篇文章的结果，这里，可利用 Schur 不等式，简短而巧妙地解决它.

证明 令 $a_{lk} = \frac{1}{n-1}(1-\delta_{lk})$，这里 δ_{lk} 当 $l=k$ 时是 1，$l\neq k$ 时为 0，$1\leqslant l, k\leqslant n$．则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk} = \sum_{l=1}^{n} a_{lk} = 1．\quad 令\ s = \sum_{k=1}^{n} a_k，那么，$$

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n - a_1 = s - 2a_1,$$
$$a_1 + a_3 + \cdots + a_n - a_2 = s - 2a_2,$$
$$\cdots$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - a_n = s - 2a_n.$$

当 $i\neq j$ 时，由于 $(s-2a_i)+(s-2a_j) = 2s - 2(a_i+a_j) \geqslant 0$，$(1\leqslant i, j\leqslant n)$，所以 n 个数 $s-2a_1, s-2a_2, \cdots, s-2a_n$ 中至多有一个是负实数．当恰有一个是负实数时，例 2 显然成立．所以只要考虑全部 $s-2a_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 为非负实数情况就行了.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk}(s-2a_k)=s-2\sum_{k=1}^{n} a_{lk}a_k$$

$$=s-\frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(1-\delta_{lk})a_k$$

$$=s-\frac{2}{n-1}(s-a_l)$$

$$=\frac{2}{n-1}a_l+\frac{n-3}{n-1}s$$

$$=a_l+\frac{n-3}{n-1}(s-a_l)=x_l. \tag{2.2}$$

由 Schur 不等式, 立即有

$$x_1x_2\cdots x_n\geqslant(s-2a_1)(s-2a_2)\cdots(s-2a_n). \tag{2.3}$$

这就是例 2.

特别当 $n=3$ 时, 我们有不等式

$$a_1a_2a_3\geqslant(a_2+a_3-a_1)(a_1+a_3-a_2)(a_1+a_2-a_3). \tag{2.4}$$

这是 1983 年瑞士数学竞赛试题.

从第一节, 我们知道 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ $(0<x<1)$ 是一个凸函数, 用它可以证明 1989 年第四届全国中学生数学冬令营的一个题目.

例 3 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数 $(n\geqslant 2)$, 且 $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$

证明 利用 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ $(0<x<1)$ 是凸函数, 有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sqrt{1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}}=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

又由于$f(x)=-\sqrt{x}\ (x>0)$也是一个凸函数(见第一节例9),有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{n}\sqrt{n},$$

所以,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.\tag{2.5}$$

例3的证明中也用到$f(x)=-\sqrt{x}\ (x>0)$是凸函数这一事实.下面我们再举一个与之有关的例题.

例4 自然数$n\geqslant3$,求证:$\sqrt{9n+8}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<3\sqrt{n+1}$.

证明 从$f(x)=-\sqrt{x}\ (x>0)$是凸函数,以及n, $n+1$, $n+2$是三个不相等的自然数,有

$$\frac{1}{3}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$$
$$<\sqrt{\frac{1}{3}(n+n+1+n+2)}=\sqrt{n+1}.\tag{2.6}$$

现在来证前一个不等式,由于$A_3\geqslant G_3$,可以看到

$$\frac{1}{3}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})>\sqrt[3]{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}}.$$

如果我们能证明

$$n(n+1)(n+2)>\left(n+\frac{8}{9}\right)^3,\tag{2.7}$$

则前一个不等式可以得到.

我们考虑函数

$$f(x)=(x-1)x(x+1)-\left(x-\frac{1}{9}\right)^3$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{28}{9}x+\frac{1}{243}\right),$$

$x^2-\frac{28}{9}x+\frac{1}{243}=0$ 的两个根是

$$x_1=\frac{1}{2}\left[\frac{28}{9}-\sqrt{\left(\frac{28}{9}\right)^2-\frac{4}{243}}\right],$$

$$x_2=\frac{1}{2}\left[\frac{28}{9}+\sqrt{\left(\frac{28}{9}\right)^2-\frac{4}{243}}\right].$$

显然 $x_1<x_2<\frac{28}{9}<4$, 由于 $y=f(x)$ 的图像是一条开口向上的抛物线，当 $x>x_2$ 时，必有 $f(x)>0$. 所以当 $x\geqslant 4$ 时，$f(x)>0$. 令 $x=n+1$, 这里自然数 $n\geqslant 3$, 那么 $f(n+1)>0$. 这就是我们要证明的.

这个方法很重要，以后还会碰到.

第一节中的不等式(1.71)是一个应用广泛的不等式，在这里，我们介绍几个例题，读者一定会感兴趣的.

例 5 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是正实数，已知 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right)^n\geqslant n\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n(n+1)^n.$$

这里自然数 $n\geqslant 2$.

证明 利用 $A_n\geqslant G_n$, 有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right)^n\geqslant\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{x_1}\right)^n\left(1+\frac{1}{x_2}\right)^n\cdots\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_n}\right),$$

这就是前一个不等式.

对于后一个不等式的证明，我们应用不等式(1.71)，有

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_n}\right)}$$

$$\geqslant 1+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}. \tag{2.8}$$

利用 $G_n \leqslant A_n$, 有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}.$$

于是，

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}} \geqslant n. \tag{2.9}$$

将(2.9)代入(2.8)，并且两端 n 次方，有

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant (1+n)^n. \tag{2.10}$$

因此，得后一个不等式.

例 6 $x_i (1\leqslant i\leqslant n)$是正实数，$\sum_{i=1}^{n} x_i=1$，求证：

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant \left(n+\frac{1}{n}\right)^n.$$

这里自然数 $n\geqslant 2$.

证明 利用不等式(1.71)，有

$$\sqrt[n]{\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)}$$

$$\geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}. \tag{2.11}$$

从上例(2.9)知道：如果令 $y=\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$，则 $y\geqslant n\geqslant 2$. 显然，$(y-n)\left(1-\frac{1}{ny}\right)\geqslant 0$，那么，

$$y+\frac{1}{y}\geqslant n+\frac{1}{n}, \tag{2.12}$$

将(2.12)代入(2.11)．并且两端 n 次方，得所证的不等式．

例 7 x_1，x_2，y_1，y_2，z_1，z_2 全是正实数，而且 $x_1y_1-z_1^2>0$，$x_2y_2-z_2^2>0$，求证：

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

证明 本题变量太多，用新的变量简化它，是首要任务．自然地，令

$$t_1=x_1y_1-z_1^2,\quad t_2=x_2y_2-z_2^2.$$

于是，$t_1>0$，$t_2>0$，且

$$[(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2]\left(\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}\right)$$

$$=(t_1+t_2+x_2y_1+x_1y_2-2z_1z_2)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$$

$$\geqslant(t_1+t_2+2\sqrt{x_2y_1x_1y_2}-2z_1z_2)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$$

（利用 $A_2\geqslant G_2$）

$$=(t_1+t_2+2\sqrt{(t_1+z_1^2)(t_2+z_2^2)}-2z_1z_2)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$$

$$\geqslant[t_1+t_2+2(\sqrt{t_1t_2}+z_1z_2)-2z_1z_2]\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$$

（利用(1.71)）

$$=(t_1+t_2+2\sqrt{t_1t_2})\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$$

$$=(t_1+t_2)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)+2\left(\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}+\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right)$$

$\geqslant 4+4$（利用不等式(1.64)和 $\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}+\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\geqslant 2$）

$$=8. \tag{2.13}$$

本例的证法带有普遍性，可以把例7推广为下述不等式.

例8 设$x_k(1\leqslant k\leqslant n)$，$y_k(1\leqslant k\leqslant n)$是正实数，实数$z_k(1\leqslant k\leqslant n)$满足不等式$x_ky_k-z_k^2>0(1\leqslant k\leqslant n)$，求证：

$$\frac{n^3}{\sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n y_k-\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)^2}\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{x_ky_k-z_k^2}.$$

这里自然数$n\geqslant 2$.

证明 令$t_k=x_ky_k-z_k^2(1\leqslant k\leqslant n)$，则$t_k>0$.

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{x_ky_k-z_k^2}\left[\sum_{k=1}^n x_k\sum_{k=1}^n y_k-\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)^2\right]$$

$$=\sum_{k=1}^n\frac{1}{t_k}\left[\sum_{k=1}^n x_ky_k+\frac{1}{2}\sum_{k\neq l}(x_ky_l+x_ly_k)\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^n z_k^2-\sum_{k\neq l}z_kz_l\right]$$

(这里$\sum_{k\neq l}$表示对下标$k,l(1\leqslant k,\ l\leqslant n)$不相同的项求和，而$\frac{1}{2}\sum_{k\neq l}(x_ky_l+x_ly_k)=\sum_{k\neq l}x_ky_l.$)

$$\geqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{t_k}\left[\sum_{k=1}^n t_k+\sum_{k\neq l}\sqrt{x_ky_lx_ly_k}\quad\sum_{k\neq l}z_kz_l\right]$$

(利用$A_2\geqslant G_2$)

$$=\sum_{k=1}^n\frac{1}{t_k}\left[\sum_{k=1}^n t_k+\sum_{k\neq l}\sqrt{(t_k+z_k^2)(t_l+z_l^2)}-\sum_{k\neq l}z_kz_l\right]$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{t_k}\left[\sum_{k=1}^n t_k+\sum_{k\neq l}(\sqrt{t_kt_l}+|z_kz_l|)-\sum_{k\neq l}z_kz_l\right]$$

(利用不等式(1.71))

$$\geqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{t_k}\left[\sum_{k=1}^n t_k+\sum_{k\neq l}\sqrt{t_kt_l}\right]=\sum_{k=1}^n\frac{1}{t_k}\left(\sum_{k=1}^n\sqrt{t_k}\right)^2$$

$$\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{t_k}}\right)^2\left(\sum_{k=1}^n\sqrt{t_k}\right)^2$$

(利用第一节不等式(1.66)，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{t_k}}\right)^2\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{t_k}}\right)^2.\ )$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{t_k}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{t_k}}\right)^2$$

$$\geqslant\frac{1}{n}n^4\quad(\text{利用第一节不等式(1.64)})$$

$$=n^3 \tag{2.14}$$

第一节不等式(1.66)在例8的证明中起了不小的作用，它也是一个很有用的不等式，在下例的证明中扮演了主角.

例 9 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$是正实数，已知$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$，求证：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\leqslant\frac{1}{n^2}(n+\sqrt{n}).\quad(\text{自然数 }n\geqslant 2)$$

证明 从(1.66)，有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.15}$$

于是，

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}+\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{n}+1}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\quad(\text{利用(2.15)})$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}(\text{再一次利用(2.15)})$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2}(n+\sqrt{n})(\text{利用不等式(1.64)}). \tag{2.16}$$

例 9 是受 1987 年加拿大中等数学杂志《Crux Mathematicorum》中一习题的启发而得出的．原题是这样的：

如果 x, y, z 都是正实数，求证：

$$\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(yz+zx+xy)} \leqslant \frac{3+\sqrt{3}}{9}. \quad (2.17)$$

该杂志解答非常繁，不可取．(2.17) 左端记为 $f(x, y, z)$．对于任意一个正实数 t，从 (2.17) 左端的表示式可以看到

$$f(tx, ty, tz)=f(x, y, z). \quad (2.18)$$

令 $t=\dfrac{1}{x+y+z}$，$tx=x^*$，$ty=y^*$，$tz=z^*$，那么，$x^*+y^*+z^*=1$，并且从 (2.18)，有

$$f(x^*, y^*, z^*)=f(x, y, z). \quad (2.19)$$

因此，只要证明当 $x^*+y^*+z^*=1$ 时，$f(x^*, y^*, z^*) \leqslant \dfrac{3+\sqrt{3}}{9}$ 就可以了，而

$$f(x^*, y^*, z^*)=\frac{x^*y^*z^*(x^*+y^*+z^*+\sqrt{x^{*2}+y^{*2}+z^{*2}})}{(x^{*2}+y^{*2}+z^{*2})(y^*z^*+z^*x^*+x^*y^*)}$$

$$=\frac{x^*+y^*+z^*+\sqrt{x^{*2}+y^{*2}+z^{*2}}}{(x^{*2}+y^{*2}+z^{*2})\left(\dfrac{1}{x^*}+\dfrac{1}{y^*}+\dfrac{1}{z^*}\right)},$$

恰巧是例 9 中 $n=3$ 的情况．

一般地，为了方便，常把 x^*, y^*, z^* 仍分别用 x, y, z 表示．这样，对于满足 (2.18) 的 $f(x, y, z)$，我们可以加上条件 $x+y+z=1$ 去证明．这个思想很有用．

例 10 x, y, z 是正实数，求证：

$$\frac{1}{8}(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant \frac{1}{3}(x+y+z)(xyz)^{\frac{2}{3}}.$$

证明 记

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{1}{8}(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$-\frac{1}{3}(x+y+z)(xyz)^{\frac{2}{3}}.$$

对于任意一个正实数 t,

$$f(tx,\ ty,\ tz)=t^3f(x,\ y,\ z). \qquad (2.20)$$

取 $t=\frac{1}{x+y+z}$, $x^*=tx$, $y^*=ty$, $z^*=tz$. 如果我们能证明 $f(x^*,\ y^*,\ z^*)>0$, 这里 $x^*+y^*+z^*=1$. 则例 10 就解决了. 为了方便, 我们仍用 x, y, z 分别表示 x^*, y^*, z^*.

由于现在 $x+y+z=1$, 那么, 由第一节不等式(1.64), 有

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 9. \qquad (2.21)$$

那么,

$$9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)\geqslant 8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right). \qquad (2.22)$$

利用 $G_3\geqslant H_3$, 有

$$(xyz)^{\frac{1}{3}}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \qquad (2.23)$$

$$\geqslant\frac{3}{\frac{9}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)}$$

$$=\frac{8}{3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)}. \qquad (2.24)$$

所以,

$$(xyz)^{-\frac{1}{3}}\leqslant\frac{3}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right). \qquad (2.25)$$

注意到 $x+y+z=1$, 则

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{1}{8}(1-z)(1-x)(1-y)-\frac{1}{3}(xyz)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{8}(xy+yz+xz-xyz)-\frac{1}{3}(xyz)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{8}xyz\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1-\frac{8}{3}(xyz)^{-\frac{1}{3}}\right]$$

$$\geqslant 0（利用(2.25)）. \tag{2.26}$$

下面是巧妙应用变量代换与(1.64)不等式的一个例子.

例 11 已知 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1$, 求证:

$$\frac{n\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k+nx_1x_2\cdots x_n}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}.$$

证明 由(1.64), 对于正实数 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\geqslant n^2,$$

那么,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}\frac{1-a_k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-1\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-n\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$\geqslant n^2-n\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}(1-a_k). \tag{2.27}$$

令 $a_k=\frac{x_k}{1+x_k}$, 则 $\frac{1}{a_k}=\frac{1+x_k}{x_k}$, $1-a_k=\frac{1}{1+x_k}$, $\frac{1-a_k}{a_k}=\frac{1}{x_k}$. 把它们代入(2.27), 有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\geqslant n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k} \tag{2.28}$$

从而,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{1+x_k}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\geqslant n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k},$$

$$\left(n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\geqslant n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}.$$

上式两边乘以 $x_1x_2\cdots x_n$，有

$$\left(n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}\right)x_1x_2\cdots x_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$$
$$\geqslant nx_1x_2\cdots x_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}. \tag{2.29}$$

从条件 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1$，容易明白

$$x_1x_2\cdots x_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=x_2x_3\cdots x_n+x_1x_3\cdots x_n+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}$$
$$\leqslant x_n+x_{n-1}+\cdots+x_1, \tag{2.30}$$

将(2.30)代入(2.29)，有

$$\left(n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}\right)\sum_{k=1}^{n}x_k\geqslant nx_1x_2\cdots x_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}.$$

上式移项后，有

$$n\sum_{k=1}^{n}x_k\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}x_k+nx_1x_2\cdots x_n\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}. \tag{2.31}$$

从而例 11 得证.

例 12 已知 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n<1$，求证：

$$(1-x_n)^2\left[\frac{x_1}{(1-x_1^2)^2}+\frac{x_2^2}{(1-x_2^3)^2}+\cdots+\frac{x_n^n}{(1-x_n^{n+1})^2}\right]$$
$$<1.$$

证明 左边第 k 项记为 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$，利用 $0<1-x_n\leqslant 1-x_k$，有

$$a_k=\frac{(1-x_n)^2x_k^k}{(1-x_k^{k+1})^2}\leqslant\frac{(1-x_k)^2x_k^k}{(1-x_k^{k+1})^2}$$
$$=\frac{x_k^k}{(1+x_k+x_k^2+\cdots+x_k^k)^2}$$

利用 $A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$，并且注意到 $x_k\neq 1$，那么，我们有

$$\frac{1}{k+1}(1+x_k+x_k^2+\cdots+x_k^k)>\sqrt[k+1]{1\cdot x_k\cdot x_k^2\cdots x_k^k}$$

$$=x_k^{\frac{1}{2}k},$$

那么，上式两端平方，有

$$(1+x_k+x_k^2+\cdots+x_k^k)^2>(k+1)^2x_k^k \tag{2.32}$$

于是，

$$a_k<\frac{1}{(k+1)^2}. \tag{2.33}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k<\sum_{k=1}^n\frac{1}{(k+1)^2}<\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}<1. \tag{2.34}$$

这就是我们需要的.

例 13 已知 a, b, c 是正实数，而且满足

$$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}=1,$$

求证：

$$abc\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

证明 到目前为止，我们已知道一些在 $\sum_{i=1}^n x_i=1$ 条件下的不等式. 因而，令

$$\frac{a^2}{1+a^2}=x,\quad \frac{b^2}{1+b^2}=y,\quad \frac{c^2}{1+c^2}=z, \tag{2.35}$$

这里 $0<x, y, z<1$，和 $x+y+z=1$.

显然有

$$a^2=\frac{x}{1-x},\quad b^2=\frac{y}{1-y},\quad c^2=\frac{z}{1-z}. \tag{2.36}$$

而

$$a^2b^2c^2=\frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}. \tag{2.37}$$

所以问题转化为去证明

$$\frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}\leqslant\frac{1}{8}. \tag{2.38}$$

从例 10 的不等式(2.26)，我们知道

$$(1-x)(1-y)(1-z)\geqslant\frac{8}{3}(xyz)^{\frac{2}{3}}. \tag{2.39}$$

从 $G_3\leqslant A_3$，有

$$(xyz)^{\frac{1}{3}}\leqslant\frac{1}{3}(x+y+z)=\frac{1}{3}, \tag{2.40}$$

那么，利用(2.39)和(2.40)，可以看到

$$\frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}\leqslant\frac{xyz}{\frac{8}{3}(xyz)^{\frac{2}{3}}}=\frac{3}{8}(xyz)^{\frac{1}{3}}$$

$$\leqslant\frac{1}{8}. \tag{2.41}$$

这就是我们所希望的.

变量代换很重要，有些表面上复杂的不等式，通过新变量，稍加分析，就一目了然了. 请看下例：

例 14 a, b, c 是正实数，求证：

$$abc[(c+a-b)(a+b-c)+(b+c-a)(c+a-b)$$
$$+(b+c-a)(a+b-c)]\geqslant(b+c-a)(c+a-b)$$
$$\cdot(a+b-c)(bc+ca+ab).$$

证明 本题看上去有点吓人. 我们引入新变量，很自然地，令

$$x=b+c-a,\ y=c+a-b,\ z=a+b-c. \tag{2.42}$$

于是，

$$a=\frac{1}{2}(y+z), \quad b=\frac{1}{2}(z+x), \quad c=\frac{1}{2}(x+y). \tag{2.43}$$

要证明的不等式化为

$$\frac{1}{8}(y+z)(z+x)(x+y)(yz+xy+xz)$$
$$\geqslant\frac{1}{4}xyz[(x+y)(z+x)+(x+y)(y+z)$$
$$+(y+z)(z+x)]. \tag{2.44}$$

由于 a, b, c 全部大于 0，那么 $y+z$, $z+x$, $x+y$ 全是正的，(2.44)两端同乘以 $\frac{8}{(y+z)(z+x)(x+y)}$，即变成

$$yz+xy+xz\geqslant 2xyz\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right). \tag{2.45}$$

由于 a, b, c 是正的，从(2.43)可以知道 x, y, z 只有两种可能：(1) x, y, z 全部非负；(2) x, y, z 中只有一个是负数.

现在我们分别就(1)、(2)两种情况来证明(2.45).

(1) x, y, z 全部非负. 从(2.43)可以知道 x, y, z 至多有一个为 0. 如果 x, y, z 中有一个为 0，那么(2.45)显然成立. 现在考虑 x, y, z 全是正数情况.

显然，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}\geqslant\frac{4}{x+y},$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{y+z}{yz}\geqslant\frac{4}{y+z},$$
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{x+z}{zx}\geqslant\frac{4}{x+z}. \tag{2.46}$$

(2.46)的三个不等式相加，有

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 2\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right). \qquad (2.47)$$

(2.47)两边同乘以 xyz，就得到(2.45).

(2) x, y, z 中有一个是负数，由于(2.45)关于 x, y, z 是对称的，不妨设 $x<0$, $y>0$, $z>0$。

令

$$y^*=-\frac{y}{x}, \quad z^*=-\frac{z}{x}. \qquad (2.48)$$

由于 $x+y>0$ 和 $x+z>0$(见(2.43))，那么 $y^*>1$ 和 $z^*>1$. 要证明的不等式(2.45)可以进一步简化为下述:

$$y^*z^*-(y^*+z^*)\geqslant -2y^*z^*\left(\frac{1}{y^*+z^*}+\frac{1}{z^*-1}+\frac{1}{y^*-1}\right).$$

(2.49)

由于

$$y^*z^*-(y^*+z^*)+\frac{2y^*z^*}{y^*+z^*}$$

$$=\frac{1}{y^*+z^*}[y^{*2}(z^*-1)+z^{*2}(y^*-1)]>0. \qquad (2.50)$$

所以不等式(2.49)成立(而且是严格不等号).

例 14 的证明是通过冷静分析，不断简化而得到的，这种解题方法是一种基本方法.

例 15 已知 $0\leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n<1$, 和 $s=1+\sum_{i=1}^{n}x_i$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{s-x_i}+(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)\leqslant 1.$$

证明 由于要证明的不等式的左端对 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是对称的，不妨设 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n<1$, 在这个假定下, $s-x_i\geqslant s-x_n(1\leqslant i\leqslant n)$, 当然 $s-x_n>0$.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{s-x_i}+(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$$

$$\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{s-x_n}+(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$$

$$=\frac{s-1}{s-x_n}+(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$$

$$=1-\frac{1-x_n}{s-x_n}+(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$$

$$=1+(1-x_n)\left[(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{n-1})-\frac{1}{s-x_n}\right]. \tag{2.51}$$

由于 $G_n\leqslant A_n$，则

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{n-1})(s-x_n)$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{n}(1-x_1+1-x_2+\cdots+1-x_{n-1}+s-x_n)\right]^n$$

$$=\left[\frac{1}{n}\left(n-1+s-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right]^n$$

$$=1\quad\left(\text{利用 } s-\sum_{i=1}^{n}x_i=1\right). \tag{2.52}$$

将(2.52)代入(2.51)，得例 15. 特别当 $0\leqslant a,\ b,\ c<1$ 时，我们有

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant1. \tag{2.53}$$

从例 16 开始，我们要向读者介绍几个重要的不等式.

例 16 （赫尔德(Hölder)不等式）

$a_i,\ b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 $2n$ 个正实数，$\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1$，则 $\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}b_i^{\beta}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)^{\beta}$.

证明 令 $A=\sum_{i=1}^{n}a_i$，$B=\sum_{j=1}^{n}b_j$，那么，

$$A^{-\alpha}B^{-\beta}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}b_i^{\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta}. \tag{2.54}$$

从第一节，我们知道 $f(x)=-\lg x\,(x>0)$ 是一个连续的凸函数. 利用加权的 Jensen 不等式，容易明白

$$\begin{aligned}\alpha\lg\frac{a_i}{A}+\beta\lg\frac{b_i}{B}&=\frac{\alpha\lg\frac{a_i}{A}+\beta\lg\frac{b_i}{B}}{\alpha+\beta}\ (\text{利用 }\alpha+\beta=1)\\&\leqslant\lg\frac{\alpha\frac{a_i}{A}+\beta\frac{b_i}{B}}{\alpha+\beta}\\&=\lg\left(\alpha\frac{a_i}{A}+\beta\frac{b_i}{B}\right).\end{aligned} \tag{2.55}$$

所以，

$$\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta}\leqslant\alpha\frac{a_i}{A}+\beta\frac{b_i}{B}. \tag{2.56}$$

关于 i 从 1 到 n 求和，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta}&\leqslant\frac{\alpha}{A}\sum_{i=1}^{n}a_i+\frac{\beta}{B}\sum_{i=1}^{n}b_i\\&=\alpha+\beta=1\ (\text{Hölder 不等式}).\end{aligned} \tag{2.57}$$

令 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$，$x_i^2=a_i$，$y_i^2=b_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$，$x_i$，$y_i$ 是实数，从 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|&=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\sqrt{b_i}\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.58}$$

这是著名的柯西(Cauchy)不等式，有很多应用.

Hölder 不等式还有另一种表示形式：

令 $\alpha=\dfrac{1}{p}$，$\beta=\dfrac{1}{q}$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，当然 $p>1$ 和 $q>1$. 又令 $a_i^{\alpha}=x_i$，$x_i^p=a_i$；$b_i^{\beta}=y_i$，$y_i^q=b_i$. 那么，Hölder 不等式变形为

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}b_i^{\beta}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\beta}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.59)$$

(2.59)是经常要用的.

类似(2.56)的证明，可以看到，对于 $\alpha>0$，$\beta>0$，且 $\alpha+\beta=1$，a，b 是正实数，有

$$a^{\alpha}b^{\beta}\leqslant\alpha a+\beta b. \qquad (2.60)$$

同样地，令 $\alpha=\dfrac{1}{p}$，$\beta=\dfrac{1}{q}$，$p>1$，$q>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$a^{\alpha}=x$，$b^{\beta}=y$，当然 $x>0$，$y>0$. 从(2.60)，有不等式

$$xy\leqslant\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q. \qquad (2.61)$$

(2.61)称为杨格(Young)不等式，在高等数学中有广泛的应用.

Hölder 不等式很容易推广为下述：

例 17 设数 $a_{\alpha i}(1\leqslant\alpha\leqslant m, 1\leqslant i\leqslant n)$，$\lambda_{\beta}(1\leqslant\beta\leqslant m)$都是正实数，已知 $\sum_{\beta=1}^{m}\lambda_{\beta}=1$，那么，有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^{\lambda_1}a_{2j}^{\lambda_2}\cdots a_{mj}^{\lambda_m}$$

$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\right)^{\lambda_1}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\right)^{\lambda_2}\cdots\left(\sum_{j=1}^{n}a_{mj}\right)^{\lambda_m}.$$

证明 证法与上例完全一样，令

$$A_{\alpha}=\sum_{j=1}^{n}a_{\alpha j}\quad(1\leqslant\alpha\leqslant m). \qquad (2.62)$$

$$(A_1^{\lambda_1}A_2^{\lambda_2}\cdots A_m^{\lambda_m})^{-1}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^{\lambda_1}a_{2j}^{\lambda_2}\cdots a_{mj}^{\lambda_m}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{1j}}{A_1}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{a_{2j}}{A_2}\right)^{\lambda_2}\cdots\left(\frac{a_{mj}}{A_m}\right)^{\lambda_m}. \qquad (2.63)$$

由于 $f(x)=-\lg x(x>0)$是连续的凸函数，有加权的 Jensen 不等式，我们容易明白

$$\lambda_1\lg\frac{a_{1j}}{A_1}+\lambda_2\lg\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+\lambda_m\lg\frac{a_{mj}}{A_m}$$
$$=\frac{1}{\sum_{\beta=1}^{m}\lambda_\beta}\left(\lambda_1\lg\frac{a_{1j}}{A_1}+\lambda_2\lg\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+\lambda_m\lg\frac{a_{mj}}{A_m}\right)$$
$$\leqslant\lg\frac{\lambda_1\frac{a_{1j}}{A_1}+\lambda_2\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+\lambda_m\frac{a_{mj}}{A_m}}{\sum_{\beta=1}^{m}\lambda_\beta}$$
$$=\lg\left(\lambda_1\frac{a_{1j}}{A_1}+\lambda_2\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+\lambda_m\frac{a_{mj}}{A_m}\right). \qquad (2.64)$$

从(2.64)，立刻有

$$\left(\frac{a_{1j}}{A_1}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{a_{2j}}{A_2}\right)^{\lambda_2}\cdots\left(\frac{a_{mj}}{A_m}\right)^{\lambda_m}$$
$$\leqslant\lambda_1\frac{a_{1j}}{A_1}+\lambda_2\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+\lambda_m\frac{a_{mj}}{A_m}.$$

上式关于 j 从 1 到 n 求和，有

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{1j}}{A_1}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{a_{2j}}{A_2}\right)^{\lambda_2}\cdots\left(\frac{a_{mj}}{A_m}\right)^{\lambda_m}$$
$$\leqslant\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=1. \qquad (2.65)$$

(2.65)两边同乘以 $A_1^{\lambda_1}A_2^{\lambda_2}\cdots A_m^{\lambda_m}$，有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^{\lambda_1}a_{2j}^{\lambda_2}\cdots a_{mj}^{\lambda_m}\leqslant A_1^{\lambda_1}A_2^{\lambda_2}\cdots A_m^{\lambda_m}. \qquad (2.66)$$

这恰是例 17 要证明的。

$f(x)=-\lg x(x>0)$ 是凸函数这一性质用途很多，请读

者看下面的例题.

例 18 对于 $2n$ 个正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$; $p_1, p_2, \cdots p_n$ 成立不等式

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}} \leqslant \left(a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

证明 利用连续的凸函数 $f(x)=-\lg x(x>0)$ 的加权的 Jensen 不等式, 有

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\sum_{i=1}^{n} p_i \lg a_i \leqslant \lg\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

那么,

$$\left(a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}. \tag{2.67}$$

用 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$ 分别代替(2.67)中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 有

$$\left(\frac{1}{a_1^{p_1}}\frac{1}{a_2^{p_2}}\cdots\frac{1}{a_n^{p_n}}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

从上式, 立即有

$$\left(a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}}. \tag{2.68}$$

在例 18 中, 取 $p_1=a_1, p_2=a_2, \cdots, p_n=a_n$, 有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \left(a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i}. \tag{2.69}$$

由于 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$（即 $A_n\geqslant G_n$），从(2.69)前一个不等式，有

$$a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}\geqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}. \tag{2.70}$$

不等式(2.69)和(2.70)是有趣的两个不等式.

在例 16 里，我们得到了 Hölder 不等式，利用它，可以简捷地建立重要的幂平均不等式.

例 19(幂平均不等式)　$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 是正实数，$\alpha>\beta>0$，则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

证明　在 Hölder 不等式(2.59)里，令 $x_i=1(1\leqslant i\leqslant n)$，那么，有

$$\sum_{i=1}^{n}y_i\leqslant n^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}y_j^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.71}$$

这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(p>1,\ q>1)$.

于是，我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.72}$$

这里 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ 是任意正实数，令 $y_i=a_i^{\beta},\ q=\frac{\alpha}{\beta}>1$，那么(2.72)变形为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}, \tag{2.73}$$

据此，我们立即有幂平均不等式：

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.74}$$

从幂平均不等式，可以极容易地证明下例.

例 20 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正实数，α, β 也是正实数，$\gamma=\alpha+\beta$，求证：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\gamma}\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)$.

证明 由幂平均不等式，有

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{2.75}$$

上式两端 α 次方，有

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}. \tag{2.76}$$

同理，有

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\gamma}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}. \tag{2.77}$$

不等式(2.76)与(2.77)相乘，得到例 20 所要证的不等式.

请读者别轻视例 20，例 20 中的不等式神通广大，从它立刻可以写出一连串奇妙的不等式：

$$n(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2). \tag{2.78}$$

$$n(a_1^5+a_2^5+\cdots+a_n^5)\geqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3). \tag{2.79}$$

$$n(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)\geqslant(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3)\cdot(a_1^{p-3}+a_2^{p-3}+\cdots+a_n^{p-3})\ (\text{自然数 } p\geqslant4). \tag{2.80}$$

在(2.80)中，令 $n=3$，并且利用 $a_1^3+a_2^3+a_3^3\geqslant3a_1a_2a_3$ ($A_3\geqslant G_3$)，有不等式

$$a_1^p+a_2^p+a_3^p\geqslant a_1a_2a_3(a_1^{p-3}+a_2^{p-3}+a_3^{p-3}). \tag{2.81}$$

这里自然数 $p\geqslant4$.

我相信读者自己能利用例 20，写出许多新鲜的不等式来.

例 21　$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，自然数 $n\geqslant 2$，$s=\sum_{i=1}^{n} a_i$，$0<\beta\leqslant 1$，求证：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{s-a_k}{a_k}\right)^{\beta}\geqslant (n-1)^{2\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{s-a_k}\right)^{\beta}.$$

证明　由于

$$s-a_k=a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_n, \tag{2.82}$$

利用幂平均不等式和上面等式，有

$$\left(\frac{a_1^{\beta}+a_2^{\beta}+\cdots+a_{k-1}^{\beta}+a_{k+1}^{\beta}+\cdots+a_n^{\beta}}{n-1}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\frac{s-a_k}{n-1}.$$

于是，　　(2.83)

$$\left(\frac{s-a_k}{n-1}\right)^{\beta}\geqslant\frac{1}{n-1}\left(a_1^{\beta}+a_2^{\beta}+\cdots+a_{k-1}^{\beta}+a_{k+1}^{\beta}+\cdots+a_n^{\beta}\right).$$

从上式，有　　(2.84)

$$\frac{1}{(n-1)^{\beta}}\left(\frac{s-a_k}{a_k}\right)^{\beta}\geqslant\frac{1}{(n-1)a_k^{\beta}}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}-a_k^{\beta}\right)$$

$$=\frac{1}{(n-1)a_k^{\beta}}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}-\frac{1}{n-1}. \tag{2.85}$$

对上式两端关于 k 从 1 到 n 求和，有

$$\frac{1}{(n-1)^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{s-a_k}{a_k}\right)^{\beta}\geqslant\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{\beta}}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}-\frac{n}{n-1}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[a_1^{\beta}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{\beta}}-\frac{1}{a_1^{\beta}}\right)+a_2^{\beta}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{\beta}}-\frac{1}{a_2^{\beta}}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+a_n^{\beta}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{\beta}}-\frac{1}{a_n^{\beta}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\sum_{k\neq i}\frac{1}{a_k^{\beta}}\quad\left(\text{这里对固定 } i,\ \sum_{k\neq i}\frac{1}{a_k^{\beta}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{\beta}}-\frac{1}{a_i^{\beta}}\right). \tag{2.86}$$

利用第一节不等式(1.64)和幂平均不等式，有

$$\left(\frac{n-1}{\sum_{k\neq i}\frac{1}{a_k^\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(\frac{\sum_{k\neq i}a_k^\beta}{n-1}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\frac{\sum_{k\neq i}a_k}{n-1}=\frac{s-a_i}{n-1}. \tag{2.87}$$

从(2.87)，立刻有

$$\sum_{k\neq i}\frac{1}{a_k^\beta}\geqslant\frac{(n-1)^{\beta+1}}{(s-a_i)^\beta}, \tag{2.88}$$

将(2.88)代入(2.86)，可以看到

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{s-a_k}{a_k}\right)^\beta\geqslant(n-1)^{2\beta}\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_i}{s-a_i}\right)^\beta. \tag{2.89}$$

例 22 (闵可夫斯基(Minkowski)不等式)设 $a_k, b_k, \cdots, L_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 全是正实数，$p>1$，则

$$\left[\sum_{k=1}^n(a_k+b_k+\cdots+L_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\cdots+\left(\sum_{k=1}^n L_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明 令 $N_k=a_k+b_k+\cdots+L_k(1\leqslant k\leqslant n)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(a_k+b_k+\cdots+L_k)^p&=\sum_{k=1}^n(a_k+b_k+\cdots+L_k)N_k^{p-1}\\&=\sum_{k=1}^n a_kN_k^{p-1}+\sum_{k=1}^n b_kN_k^{p-1}\\&\quad+\cdots+\sum_{k=1}^n L_kN_k^{p-1}.\end{aligned} \tag{2.90}$$

利用 Hölder 不等式(2.59)有

$$\sum_{k=1}^n a_kN_k^{p-1}\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n N_k^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{k=1}^n b_kN_k^{p-1}\leqslant\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n N_k^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

……

$$\sum_{k=1}^{n} L_k N_k^{p-1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} L_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} N_k^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.91)$$

这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $(p-1)q=p$.

将(2.91)代入(2.90)，有

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k+\cdots+L_k)^p$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} N_k^p\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left. +\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} L_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]. \qquad (2.92)$$

注意到 N_k 的定义，及 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$，上式两端同乘以 $\left(\sum_{k=1}^{n} N_k^p\right)^{-\frac{1}{q}}$，可以得到

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k+\cdots+L_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} L_k^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.93)$$

Minkowski 不等式是个著名的不等式．特别当 $p=2$，和 $n=2$ 时，把 a_1, b_1, …, L_1 改写为 a_1, a_2, …, a_m, 把 a_2, b_2, …, L_2 改写为 b_1, b_2, …, b_m，那么，从(2.93)，有

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right)^2}$$

$$\leqslant \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_m^2+b_m^2}. \qquad (2.94)$$

下面的例题是 Minkowski 不等式的一个应用．

例 23 若 a_j 和 $b_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 全是正实数，已知 $a_jb_j=c_j^2+d_j^2(1\leqslant j\leqslant n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2.$$

这里 c_j, d_j 是正实数($1\leqslant j\leqslant n$).

证明

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j^2+d_j^2}{a_j}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{a_i})^2\sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{c_j^2+d_j^2}{a_j}}\right)^2$$

$$\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\sqrt{\frac{c_i^2+d_i^2}{a_i}}\right)^2$$

(利用 Cauchy 不等式(2.58))

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{c_i^2+d_i^2}\right)^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2.$$

(利用 Minkowski 不等式(2.94)).

下面我们向读者介绍另外两个有用的不等式.

例 24(施外策(Schweitzer)不等式) 已知 a, b, A, B 是正实数, $a<A$, $b<B$, $a\leqslant a_j\leqslant A$($1\leqslant j\leqslant n$), $b\leqslant b_j\leqslant B$($1\leqslant j\leqslant n$), 当自然数 $n\geqslant 2$ 时, 有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2}\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2.$$

证明 由于 $0<a\leqslant a_i\leqslant A$, $0<b\leqslant b_i\leqslant B$ ($1\leqslant i\leqslant n$), 那么,

$$\frac{b}{A}\leqslant\frac{b_i}{a_i}\leqslant\frac{B}{a}. \tag{2.95}$$

$$\frac{b}{A}a_i\leqslant b_i\leqslant\frac{B}{a}a_i. \tag{2.96}$$

显然地, $\frac{b}{A}a_i-b_i\leqslant 0$, $\frac{B}{a}a_i-b_i\geqslant 0$ 和

$$\left(\frac{b}{A}a_i-b_i\right)\left(\frac{B}{a}a_i-b_i\right)\leqslant 0. \tag{2.97}$$

展开上式，有

$$b_i^2+\frac{bB}{aA}a_i^2\leqslant\left(\frac{B}{a}+\frac{b}{A}\right)a_ib_i. \tag{2.98}$$

上面不等式对 i 从 1 到 n 求和，可以得到

$$\sum_{i=1}^n b_i^2+\frac{bB}{aA}\sum_{i=1}^n a_i^2\leqslant\left(\frac{B}{a}+\frac{b}{A}\right)\sum_{i=1}^n a_ib_i. \tag{2.99}$$

利用 $A_2\geqslant G_2$，有

$$\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)+\left(\frac{bB}{aA}\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\geqslant 2\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{bB}{aA}\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.100}$$

将(2.100)代入(2.99)，有

$$2\sqrt{\frac{bB}{aA}}\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\frac{B}{a}+\frac{b}{A}\right)\sum_{i=1}^n a_ib_i. \tag{2.101}$$

从(2.101)，有

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^n a_ib_i}\leqslant\frac{\frac{B}{a}+\frac{b}{A}}{2\sqrt{\frac{bB}{aA}}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}\right). \tag{2.102}$$

(2.102)两端平方，得 Schweitzer 不等式.

例 25（康特诺维奇（Kantorovich）不等式）设 $a_i>0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum_{i=1}^n a_i=1$，$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，则

$$\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{\lambda_i}\leqslant\frac{1}{4\lambda_1\lambda_n}(\lambda_1+\lambda_n)^2.$$

证明 由于$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，有

$$\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_n)\leqslant 0. \tag{2.103}$$

展开上式，有

$$\lambda_i-(\lambda_1+\lambda_n)+\frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_i}\leqslant 0. \tag{2.104}$$

上面不等式两边乘以a_i，并且关于i从1到n求和，并且利用$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，有

$$\begin{aligned}0&\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i-(\lambda_1+\lambda_n)+\frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_i}\right]a_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i-(\lambda_1+\lambda_n)+\lambda_1\lambda_n\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}.\end{aligned} \tag{2.105}$$

从(2.105)，有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\leqslant\lambda_1+\lambda_n-\lambda_1\lambda_n\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}. \tag{2.106}$$

上式两边乘以$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}$，可以看到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}&\leqslant(\lambda_1+\lambda_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}-\lambda_1\lambda_n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)^2\\&=\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}-\lambda_1\lambda_n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}-\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2\lambda_1\lambda_n}\right)^2\\&\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.\end{aligned} \tag{2.107}$$

证明不等式的方法还有不少，例如用数学归纳法．下面我们再举五个例子，解决它们几乎不需要凸函数理论，有时，只要方法巧妙，问题会变得很简单．

例 26 $a_1, a_2, \cdots, a_n$是正实数，p是自然数，求证：

$$\frac{a_1^{p+1}}{a_2^p}+\frac{a_2^{p+1}}{a_3^p}+\cdots+\frac{a_n^{p+1}}{a_1^p}\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

证明 本题有一个简单证法．

由于

$$(a_i - a_{i+1})(a_i^p - a_{i+1}^p) \geqslant 0. \tag{2.108}$$

所以

$$a_i^{p+1} + a_{i+1}^{p+1} \geqslant a_i^p a_{i+1} + a_i a_{i+1}^p. \tag{2.109}$$

上式两端乘以 a_{i+1}^{-p}，有

$$\frac{a_i^{p+1}}{a_{i+1}^p} + a_{i+1} \geqslant \frac{a_i^p}{a_{i+1}^{p-1}} + a_i. \tag{2.110}$$

上式两端关于 i 从 1 到 n 求和，令 $a_{n+1}=a_1$，有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p+1}}{a_{i+1}^p} + \sum_{i=1}^n a_{i+1} \geqslant \sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{a_{i+1}^{p-1}} + \sum_{i=1}^n a_i. \tag{2.111}$$

由于 $a_{n+1}=a_1$，那么，$\sum_{i=1}^n a_{i+1} = \sum_{i=1}^n a_i$. 于是 (2.111) 就可简化为下述不等式:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p+1}}{a_{i+1}^p} \geqslant \sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{a_{i+1}^{p-1}}. \tag{2.112}$$

从上述证明可以看出，对于任意自然数 p，有(2.112). 反复利用(2.112)，有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p+1}}{a_{i+1}^p} \geqslant \sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{a_{i+1}^{p-1}} \geqslant \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p-1}}{a_{i+1}^{p-2}} \geqslant \cdots \geqslant \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \geqslant \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i^0} = \sum_{i=1}^n a_i. \tag{2.113}$$

例 27 a_i, $b_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 全是正实数，p 是自然数，求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p+1}}{b_i^p} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{p+1}}{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^p}.$$

证明 令

$$x_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^n a_j}, \quad y_i = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^n b_j} \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{2.114}$$

那么，有 $x_i > 0$, $y_i > 0$，和

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=1, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i=1. \tag{2.115}$$

如果我们能证明

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{p+1}}{y_i^p} \geqslant 1. \tag{2.116}$$

问题就解决了. 对于任意自然数 p,

$$(x_i^p - y_i^p)(x_i - y_i) \geqslant 0, \tag{2.117}$$

于是

$$x_i^{p+1} + y_i^{p+1} \geqslant x_i y_i^p + x_i^p y_i. \tag{2.118}$$

上式两端同乘以 y_i^{-p}, 有

$$\frac{x_i^{p+1}}{y_i^p} + y_i \geqslant x_i + \frac{x_i^p}{y_i^{p-1}}. \tag{2.119}$$

(2.119)两端关于 i 从 1 到 n 求和, 并且利用(2.115), 有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{p+1}}{y_i^p} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{y_i^{p-1}}. \tag{2.120}$$

同上例一样, 反复利用(2.120), 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{p+1}}{y_i^p} &\geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{y_i^{p-1}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{p-1}}{y_i^{p-2}} \\ &\geqslant \cdots \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i^0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.\end{aligned} \tag{2.121}$$

例 26 与例 27 的解题思想是同一个, 想办法寻找一种可以递推的不等式, 例如(2.112), (2.120).

例 28 已知 $x_i(1 \leqslant i \leqslant n)$是正实数, 自然数 $n \geqslant 2$, 求证:

(1) $1 \leqslant \frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n}{x_n+x_1} \leqslant n-1.$

(2) $\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2+x_nx_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2} \leqslant n-1.$

(3) $$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n}+\frac{x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}}{x_{k+2}+x_{k+3}+\cdots+x_n+x_1}$$
$$+\cdots+\frac{x_n+x_1+\cdots+x_{k-1}}{x_k+x_{k+1}+\cdots+x_{n-1}}\geqslant\frac{nk}{n-k},$$

这里自然数 $k<n$.

证明 (1) 显然地,

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1}$$
$$\geqslant\frac{x_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}+\frac{x_2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}+\frac{x_n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=1.$$

又

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1}$$
$$=\left(1-\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)+\left(1-\frac{x_3}{x_2+x_3}\right)$$
$$+\cdots+\left(1-\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}\right)+\left(1-\frac{x_1}{x_n+x_1}\right)$$
$$=n-\left(\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_3}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_1}{x_n+x_1}\right).$$
$$\leqslant n-\left(\frac{x_2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}+\frac{x_3}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}+\cdots+\frac{x_n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}+\frac{x_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\right)$$
$$=n-1. \qquad (2.122)$$

(2) 引入新变量, 令

$$y_i=\frac{x_i^2}{x_{i+1}x_{i+2}}\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$
$$x_{n+1}=x_1,\ x_{n+2}=x_2. \qquad (2.123)$$

明显地, $y_i>0$ 和

$$y_1y_2\cdots y_n=1. \qquad (2.124)$$

$$\frac{x_i^2}{x_i^2+x_{i+1}x_{i+2}}=1-\frac{x_{i+1}x_{i+2}}{x_i^2+x_{i+1}x_{i+2}}$$
$$=1-\frac{1}{1+y_i}\quad (1\leqslant i\leqslant n).\qquad (2.125)$$

于是，我们有

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2+x_nx_1}+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2}$$
$$=n-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+y_i}.\qquad (2.126)$$

如果我们能证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+y_i}\geqslant 1,\qquad (2.127)$$

则(2)得证.

由于(2.124)，则必有最小两个 y_i, $y_j(i\neq j)$,

$$y_i\cdot y_j\leqslant 1\qquad (2.128)$$

那么，对于这两个数 y_i, y_j,

$$\frac{1}{1+y_i}+\frac{1}{1+y_j}=\frac{2+y_i+y_j}{(1+y_i)(1+y_j)}\geqslant 1,\qquad (2.129)$$

(2.127)的确成立，从而有(2).

(3) 记要证的不等式左边为 s.

$$s+n=\sum_{i=1}^{n}x_i\Big(\frac{1}{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n}+\frac{1}{x_{k+2}+x_{k+3}+\cdots+x_n+x_1}+\cdots+\frac{1}{x_k+x_{k+1}+\cdots+x_{n-1}}\Big).\qquad (2.130)$$

令 $$F=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i}\big[(x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n)+(x_{k+2}+x_{k+3}+\cdots+x_n+x_1)+\cdots+(x_k+x_{k+1}+\cdots+x_{n-1})\big]=n-k.\qquad (2.131)$$

这是由于上述中括号内 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的项一共有 $n(n-k)$ 项，每个 x_i 出现的总次数完全一样，所以每个 x_i 出现的总次数是 $\frac{1}{n}n(n-k)=n-k$ 次.

利用第一节不等式(1.64)，并且注意(2.130)和(2.131)，有

$$F(s+n)\geqslant n^2, \tag{2.132}$$

因而，

$$s+n\geqslant\frac{n^2}{F}=\frac{n^2}{n-k}, \tag{2.133}$$

从而

$$s\geqslant\frac{n^2}{n-k}-n=\frac{nk}{n-k}. \tag{2.134}$$

例 29 x, y, z 是非负实数，$x^2+y^2+z^2=k$，这里 $2\leqslant k\leqslant 4$. 求证：

$$x+y+z\leqslant xyz+\sqrt{\frac{1}{2}k(k+2)}.$$

证明 明显地，有

$$\begin{aligned}
&0\leqslant x^2+(y-z)^2=k-2yz,\\
&0\leqslant y^2+(x-z)^2=k-2xz,\\
&0\leqslant z^2+(x-y)^2=k-2xy.
\end{aligned} \tag{2.135}$$

(2.135)的三个不等式相乘，有

$$\begin{aligned}
0&\leqslant(k-2yz)(k-2xz)(k-2xy)\\
&=k^3-2k^2(xy+yz+zx)+4kxyz(x+y+z)\\
&\quad-8x^2y^2z^2\\
&=-2k(x+y+z-xyz)^2+k^2(k+2)\\
&\quad+2k(2-k)(xy+yz+zx)\\
&\quad+2(k-4)x^2y^2z^2\\
&\leqslant-2k(x+y+z-xyz)^2+k^2(k+2).\\
&\quad(\text{利用 } 2\leqslant k\leqslant 4)
\end{aligned} \tag{2.136}$$

所以，我们可以得到

$$(x+y+z-xyz)^2 \leqslant \frac{1}{2}k(k+2). \qquad (2.137)$$

两端开方，得

$$|x+y+z-xyz| \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}k(k+2)}. \qquad (2.138)$$

那么，

$$x+y+z-xyz \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}k(k+2)}. \qquad (2.139)$$

不等式(2.139)很有意思，当 $k=2$ 时，我们有

$$x+y+z \leqslant xyz+2. \qquad (2.140)$$

当 $k=4$ 时，有

$$x+y+z \leqslant xyz+2\sqrt{3}. \qquad (2.141)$$

现在，我们向读者介绍本节最后一个不等式.

例 30 a, b 是正实数，$a \geqslant b$，求证：对于自然数 n，有

$$\sqrt{\frac{a}{a+3nb}} \leqslant \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+3b}{a+4b} \cdot \cdots \cdot \frac{a+3(n-1)b}{a+(3n-2)b} < \sqrt[3]{\frac{a}{a+3nb}}.$$

证明 我们首先证明：对于自然数 n，有

$$\frac{a+3(n-1)b}{a+(3n-2)b} < \sqrt[3]{\frac{a+3(n-1)b}{a+3nb}}, \qquad (2.142)$$

换句话说，要证明

$$[a+3(n-1)b]^2(a+3nb) < [a+(3n-2)b]^3. \qquad (2.143)$$

利用 $G_3 \leqslant A_3$，有

$$\begin{aligned}&[a+3(n-1)b]^2(a+3nb)\\ &< \left\{\frac{1}{3}[a+3(n-1)b+a+3(n-1)b+a+3nb]\right\}^3\\ &= [a+(3n-2)b]^3. \qquad (2.144)\end{aligned}$$

这里由于 $a+3(n-1)b\neq a+3nb$，上述不等式不可能取等号. 从而，有(2.142).

在(2.142)中，令 $n=1, 2, \cdots$，那么，有

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+3b}{a+4b}\cdot\cdots\cdot\frac{a+3(n-1)b}{a+(3n-2)b}$$

$$<\sqrt[3]{\frac{a}{a+3b}}\sqrt[3]{\frac{a+3b}{a+6b}}\cdots\sqrt[3]{\frac{a+3(n-1)b}{a+3nb}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a}{a+3nb}}. \tag{2.145}$$

下面证明：对于每个自然数 n，有

$$\frac{a+3(n-1)b}{a+(3n-2)b}\geqslant\sqrt{\frac{a+3(n-1)b}{a+3nb}}. \tag{2.146}$$

这等价于要证明

$$[a+3(n-1)b](a+3nb)\geqslant[a+(3n-2)b]^2. \tag{2.147}$$

而

$$\begin{aligned}&[a+3(n-1)b](a+3nb)-[a+(3n-2)b]^2\\&=b[a+(3n-4)b]\\&\geqslant 0\quad(\text{由于 } a\geqslant b>0),\end{aligned} \tag{2.148}$$

于是，不等式(2.146)成立，令 $n=1, 2, \cdots$，从(2.146)，可以看到

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+3b}{a+4b}\cdot\cdots\cdot\frac{a+3(n-1)b}{a+(3n-2)b}$$

$$\geqslant\sqrt{\frac{a}{a+3b}}\cdot\sqrt{\frac{a+3b}{a+6b}}\cdots\sqrt{\frac{a+3(n-1)b}{a+3nb}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{a+3nb}}. \tag{2.149}$$

特别地，令 $a=b=1$，有

$$(3n+1)^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)} < (3n+1)^{-\frac{1}{3}}. \tag{2.150}$$

阅读了本节，在代数不等式方面，我猜想读者会有些得益.

荀子说："不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海．骐骥一跃，不能十步，驽马十驾，功在不舍．"从高中时代起，我一直喜欢荀子的《劝学篇》．我想一般读者也同我的青年时代一样，有强烈的求知欲望，但有急于求成的思想．荀子的上述话可以作为学习上的座右铭.

习 题 二

1．x_i 是正实数 $(1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum_{i=1}^{n} x_i=1$，求证：

$$\left(1+\frac{1}{x_1^n}\right)\left(1+\frac{1}{x_2^n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_n^n}\right)\geqslant(n^n+1)^n.$$

（提示：参考例 5.）

2．x_i 是正实数$(1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum_{i=1}^{n} x_i=1$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i^n}\right)^n\geqslant n(n^n+1)^n.$$

（提示：利用 $A_n\geqslant G_n$ 及上例．）

3．x_i 是正实数$(1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum_{i=1}^{n} x_i=1$．求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)^2\geqslant\frac{1}{n}(n^2+1)^2.$$

（提示：利用第一节不等式(1.75)．）

4．$0<x_i<\frac{1}{2}(1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum_{i=1}^{n} x_i=1$．求证：

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)\geqslant(n-1)^n x_1x_2\cdots x_n.$$

（提示：利用第一节不等式(1.74)．）

5．x_i 是正实数$(1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$，求证：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant(n+1)^n x_1x_2\cdots x_n.$$

（提示：令 $A=x_1x_2\cdots x_n$，对$\left[\left(\frac{1}{A}+\frac{x_1}{A}\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{x_2}{A}\right)\cdots\left(\frac{1}{A}+\frac{x_n}{A}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$利用不等式(1.71).）

6．x_i 是正实数$(1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=s\leqslant n$，自然数 $n\geqslant2$，求证：

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\left(\frac{s}{n}+\frac{n}{s}\right)^n.$$

（提示：参考例 6.）

7．n，k 是自然数，已知 $n>k\geqslant2$，求证：$(n-2)^k>n^{k-2}(n-k)^2$.

（提示：利用第一节习题15.）

8．设 $a_{\alpha j}(1\leqslant\alpha\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$ 是正实数，求证：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\cdots\sum_{j=1}^{n}a_{mj}\geqslant[\sqrt[m]{a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}}+\sqrt[m]{a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}}+\cdots+\sqrt[m]{a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}}]^m.$$

（提示：反复利用不等式(1.71).）

9．设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实数，自然数 $n\geqslant2$，已知

$$A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2<\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2,$$

求证：$A<2a_ia_j\ (1\leqslant i<j\leqslant n)$.

（提示：把 a_i+a_j 看作一个数，利用不等式(1.66).）

10．$x>0$，$y>0$，$x^2+y^2=1$. 求证：$x^3+y^3\geqslant\sqrt{2}\,xy$.

（提示：利用幂平均不等式.）

11．已知 x_i 是正实数$(1\leqslant i\leqslant n)$，$p$ 是自然数，求证：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^p\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{p+1}}{\sum_{i=1}^{n}x_i}.$$

（提示：利用例 20.）

12．$A\geqslant a>0$，已知 $a\leqslant a_j\leqslant A\ (1\leqslant j\leqslant n)$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant\frac{n^2}{4}\left(\sqrt{\frac{A}{a}}+\sqrt{\frac{a}{A}}\right)^2.$$

(提示：利用 Schweitzer 不等式，也可利用 Kantorovich 不等式.)

13. 已知 a, b, x 是实数，求证：$(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b)\geqslant -4a^2b^2$.

(提示：右边移项到左边，恰为一个完全平方数.)

14. 自然数 $n\geqslant 3$，求证：

$$n[(n+1)^{\frac{1}{n}}-1]<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<n-(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}.$$

(提示：对 $\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n}$，利用 $A_n\geqslant G_n$. 对 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}$，利用 $A_{n-1}\geqslant G_{n-1}$.)

15. a_i, $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是正实数，p 是正实数，已知 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=p$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}(b_ix_i)^k\geqslant\frac{p^k}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]^{k-1}},$$

这里 $k\geqslant 2$, $b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 也是正实数.

(提示：对 $\left[\sum_{i=1}^{n}(b_ix_i)^k\right]^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}$ 利用 Hölder 不等式.)

16. 设 a, b, c 为实数，α, β, γ 是正实数，求证：

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}a^2+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}b^2+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}c^2\geqslant 2(ab+bc+ca).$$

(提示：利用 $A_2\geqslant G_2$.)

17. 已知 $a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 1$ (a, b, c, d 是实数)，求证：

$$s=(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\leqslant 6.$$

(提示：证明 $s+(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.)

18. 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是正实数，满足条件 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j=1$. 这里自然数 $n\geqslant 3$，求证：$\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant\sqrt{\frac{2n}{n-1}}$.

(提示：$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i^2+a_j^2)\geqslant\frac{2}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j=\frac{2}{n-1}$，而 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j$.)

19. 设$a\geqslant\frac{1}{3}$, $b\geqslant\frac{1}{3}$, $a+b=1$, 求证: $ab\geqslant\frac{2}{9}$.

$\left(\text{提示: 令 } a=\frac{1}{3}+u,\ b=\frac{1}{3}+v.\right)$

20. x, y, z, λ是正实数, 求证: $x^{\lambda}(x-y)(x-z)+y^{\lambda}(y-x)(y-z)+z^{\lambda}(z-x)(z-y)\geqslant 0$.

(提示: 不妨设$x\geqslant y\geqslant z$, 令$x=z+u$, $y=z+v$, $u\geqslant v\geqslant 0$.)

21. $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$是正实数,已知$\sum_{i=1}^{n}x_i=s$, $s<n$, 自然数$n\geqslant 2$, p是正实数,求证:

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{-p}+(x_1x_2\cdots x_n)^{p}\geqslant\left(\frac{n}{s}\right)^{np}+\left(\frac{s}{n}\right)^{np}.$$

(提示: 利用$G_n\leqslant A_n$, 并考虑函数$f(x)=x^{-p}+x^{p}\ (x\geqslant 1)$的单调性.)

22. x_1, x_2, x_3是正实数, $x_1+x_2+x_3=1$. 已知$r\geqslant\frac{2}{3}$, 和不等式$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\geqslant C_r(x_1x_2x_3)^r$, 对满足条件的所有$x_1, x_2, x_3$成立,求最大常数$C_r$.

(提示: $C_r=8\cdot 3^{3(r-1)}$.)

23. 寻找最小正整数k,使得对于满足$0\leqslant a\leqslant 1$的所有a和所有自然数n, 始终有不等式$a^k(1-a)^n<\frac{1}{(n+1)^3}$.

(提示: 利用$G_{n+k}\leqslant A_{n+k}$,先证$\sqrt[n+k]{a^k\left[\frac{k}{n}(1-a)\right]^n}\leqslant\frac{k}{n+k}$, 从而有$a^k(1-a)^n\leqslant\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}$. 找最小的正整数$k$, 使得对所有自然数$n$,有$\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}<\frac{1}{(n+1)^3}$. 第二步证$k=1, 2, 3$, 都有某些自然数$n$, 使上述不等式不成立,则必有$k\geqslant 4$. 最后一步证$k=4$时,对任意自然数$n$,上述不等式成立.)

24. (伯努利(Bernoulli)不等式)已知$x>-1$和$a>1$, 求证:

$$(1+x)^a\geqslant 1+ax.$$

(提示: 只要对$y=ax>-1$加以证明就行了. 令$b=\frac{1}{a}$, $0<b<1$, 问题转化为去证明$1+by\geqslant(1+y)^b$. 先对正有理数b, 利用$G_n\leqslant$

A_n 加以证明.)

25. A_n 是 n 个正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算术平均值，G_n 是 n 个正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的几何平均值. 求证：当自然数 $n\geqslant 2$ 时，

$$n(A_n - G_n)\geqslant (n-1)(A_{n-1}-G_{n-1}).$$

(提示：先证明恒等式 $\frac{G_{n-1}}{n}\left[(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}+\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n\right]=A_n$. 再证明对 $z\geqslant 0$ 和自然数 n，有 $z^n - nz+n-1\geqslant 0$. 最后令 $z=\frac{G_n}{G_{n-1}}$，并且利用先证明的恒等式. ）

下面再列出五个习题，没有提示，希望读者充分发挥自已的能力，去解决它们.

26. 已知 $x>0$, $y>0$, $2x+y=1$，求证：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

27. 正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i\leqslant\frac{1}{2}$，求证：

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)\geqslant\frac{1}{2}.$$

28. a, b, c, d 是正实数，求证：

$$1<\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}<2.$$

29. $0<x<1$，n 是自然数，求证：$x^{n-1}(1-x)^n<\frac{1}{2^{2n-2}}$.

30. $a_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$ 是正实数，自然数 n, p 都大于等于 2，求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}\right).$$

三　琴生不等式的三角应用

在这一节，我们要介绍前两节建立的一些不等式的三角应用. 为了节约篇幅，我们规定三角形 ABC 的三个内角分别用 A、B、C 表示，而且全部用弧度计算.

在 $\triangle ABC$ 中，利用第一节不等式 (1.58)，有

(1) $$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant 3\sin\frac{1}{3}(A+B+C)$$
$$=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}. \qquad (3.1)$$

(2) 利用 $G_3\leqslant A_3$，有

$$\sin A\sin B\sin C\leqslant\left[\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)\right]^3$$
$$\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\text{（利用(3.1)）}$$
$$=\frac{3}{8}\sqrt{3}. \qquad (3.2)$$

(3) n 是自然数，类似(1)，有

$$\sin\frac{A}{2^n}+\sin\frac{B}{2^n}+\sin\frac{C}{2^n}\leqslant 3\sin\frac{1}{3}\left(\frac{A+B+C}{2^n}\right)$$
$$=3\sin\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2^n}. \qquad (3.3)$$

(4) n 是自然数，类似(2)，有

$$\sin\frac{A}{2^n}\sin\frac{B}{2^n}\sin\frac{C}{2^n}\leqslant\left[\frac{1}{3}\left(\sin\frac{A}{2^n}+\sin\frac{B}{2^n}+\sin\frac{C}{2^n}\right)\right]^3$$
$$\leqslant\sin^3\frac{1}{3}\frac{\pi}{2^n}. \qquad (3.4)$$

特别地，当 $n=1$，有

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}. \quad (3.5)$$

(5) 从第一节不等式(1.81)，有

$$\csc A+\csc B+\csc C\geqslant 3\csc\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}. \quad (3.6)$$

(6) 利用一个熟知的三角恒等式和不等式(3.5)，我们可得

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}. \quad (3.7)$$

当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，我们还能推出许多三角不等式.

(7) 利用 $G_3\leqslant A_3$，有

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\left[\frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)\right]^3$$

$$\leqslant\frac{1}{8}\quad（利用(3.7)）. \quad (3.8)$$

(8) 读者知道

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C. \quad (3.9)$$

利用(3.8)和 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，有

$$2<\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4}. \quad (3.10)$$

(9) 利用第一节不等式(1.68)，有

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C\geqslant 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}. \quad (3.11)$$

(10) 利用第一节不等式(1.69)，有

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C\geqslant 3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}. \quad (3.12)$$

(11) 利用第一节不等式(1.80)，有

$$\sec A+\sec B+\sec C\geqslant 3\sec\frac{\pi}{3}=6. \qquad (3.13)$$

(12) 利用第一节不等式(1.78)，有

$$\frac{\sin A}{A}\,\frac{\sin B}{B}\,\frac{\sin C}{C}\leqslant\left[\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}\right]^3=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3. \qquad (3.14)$$

(13) 利用第一节不等式(1.79)，有

$$\frac{\operatorname{tg} A}{A}\,\frac{\operatorname{tg} B}{B}\,\frac{\operatorname{tg} C}{C}\geqslant\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}\right]^3=\left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right)^3. \qquad (3.15)$$

(14) p 是自然数，利用第一节不等式(1.65) 和(3.11)，有

$$\left[\frac{1}{3}(\operatorname{tg}^p A+\operatorname{tg}^p B+\operatorname{tg}^p C)\right]^{\frac{1}{p}}\geqslant\frac{1}{3}(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)$$
$$\geqslant\sqrt{3}.$$

那么，我们有

$$\operatorname{tg}^p A+\operatorname{tg}^p B+\operatorname{tg}^p C\geqslant 3^{\frac{p}{2}+1}. \qquad (3.16)$$

(15) 由于 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，那么，$\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}>\frac{C}{2}$，和 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)>\sin\frac{C}{2}$，从而，有

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B&=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)\\&=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{1}{2}(A-B)\\&>2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B)\\&=\cos A+\cos B.\end{aligned} \qquad (3.17)$$

同理有

$$\sin B+\sin C>\cos B+\cos C,$$

$$\sin C+\sin A>\cos C+\cos A. \qquad (3.18)$$

(3.17)与(3.18)的三个不等式相加，有

$$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C. \qquad (3.19)$$

虽然(3.19)的证明没有用到凸函数理论，但是它是一个有意义的不等式，所以在这里介绍给读者.

上面十五个不等式都很容易，可作为本节的开场锣鼓，下面我们进一步介绍一些例题.

例 1 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C\geqslant 3(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)\geqslant \operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\geqslant 3\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\geqslant 3\sqrt{3}.$$

证明 读者知道：由于 $A+B+C=\pi$，则有

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C. \qquad (3.20)$$

于是，

$$\begin{aligned}&(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C\\&=(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)^2\\&=(\operatorname{tg}^2 A+\operatorname{tg}^2 B+\operatorname{tg}^2 C)\\&\quad+2(\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} C\operatorname{tg} A)\\&\geqslant 3(\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} C\operatorname{tg} A). \qquad (3.21)\end{aligned}$$

由于 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，(3.21)两端乘以正数 $\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B\cdot\operatorname{ctg} C$，可得

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C\geqslant 3(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C). \qquad (3.22)$$

由于 $\frac{1}{2}(A+B+C)=\frac{1}{2}\pi$，有

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}. \qquad (3.23)$$

类似(3.22)的证明，有

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$
$$=\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)^2$$
$$\geqslant 3\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right). \tag{3.24}$$

上式两边同乘以 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$，有

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\geqslant 3\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right). \tag{3.25}$$

利用第一节不等式(1.68)，有

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}. \tag{3.26}$$

读者知道 $\quad 2\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=-\operatorname{tg}\frac{A}{2}$，

于是，

$$3\operatorname{ctg}A-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=-\frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}. \tag{3.27}$$

同理，有

$$3\operatorname{ctg}B-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=-\frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}. \tag{3.28}$$

$$3\operatorname{ctg}C-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=-\frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}. \tag{3.29}$$

(3.27)、(3.28)、(3.29)三等式相加，可以看到

$$3(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)-\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$
$$\geqslant 0 \text{（利用(3.25)）}. \tag{3.30}$$

这样，我们证明了例1，在例1中，除了第一个不等式用到锐角三角形这一条件外，其余全部不用锐角三角形的锐角这一条件.

例2 在$\triangle ABC$中，求证：

$$2(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)\geqslant\csc A+\csc B+\csc C.$$

证明 显然，

$$\csc A=\frac{1}{\sin A}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right). \tag{3.31}$$

同理，有

$$\csc B=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right), \tag{3.32}$$

$$\csc C=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right). \tag{3.33}$$

利用(3.31)、(3.32)和(3.33)有

$$\begin{aligned}&2(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)-(\csc A+\csc B+\csc C)\\&=\left[\frac{3}{2}(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)\right]\\&\quad+\left[\frac{1}{2}(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\right]\\&\geqslant 0\ (\text{利用例1不等式(3.30)和(3.25)}).\end{aligned} \tag{3.34}$$

例3 在$\triangle ABC$中，求证：

$$\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+5}$$

$$\leqslant 4\sqrt{3}.$$

证明 在 $\triangle ABC$ 中，读者都知道

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1. \quad (3.35)$$

利用 $f(x)=-\sqrt{x}\,(x>0)$ 是凸函数，我们有

$$\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+5}$$

$$\leqslant 3\sqrt{\frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)+5}$$

$$=4\sqrt{3}. \quad (3.36)$$

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4}+\cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4}\leqslant\frac{3\sqrt{6}}{8}.$$

证明 对于三个实数 x, y, z,

$$\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$$

$$=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$$

$$-2\cos\frac{1}{2}(x+y+2z)\sin\frac{1}{2}(x+y)$$

$$=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\left[\cos\frac{1}{2}(x-y)-\cos\frac{1}{2}(x+y+2z)\right]$$

$$=4\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x+z)\sin\frac{1}{2}(y+z). \quad (3.37)$$

通过类似计算，有

$$\cos x+\cos y+\cos z+\cos(x+y+z)$$

$$=4\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x+z)\cos\frac{1}{2}(y+z). \quad (3.38)$$

令

$$x=\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2},\quad y=\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2},\quad z=\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2},\tag{3.39}$$

则

$$x+y+z=\frac{\pi}{4}.\tag{3.40}$$

明显地,

$$\frac{1}{2}(x+y)=\frac{C}{4},\quad \frac{1}{2}(y+z)=\frac{A}{4},\quad \frac{1}{2}(x+z)=\frac{B}{4}.\tag{3.41}$$

将(3.39)、(3.40)和(3.41)代入(3.37)、(3.38),我们有

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=4\sin\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4}.\tag{3.42}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=4\cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4}.\tag{3.43}$$

(3.42)和(3.43)相加,有

$$4\left(\sin\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4}+\cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4}\right)$$
$$=\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\right]+\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right]+\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right).\tag{3.44}$$

利用第一节不等式(1.67),有

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqslant 3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.\tag{3.45}$$

如果我们能证明

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}>1+\sin\frac{A}{2}$$

$$+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}>2. \tag{3.46}$$

从(3.44)、(3.45)和(3.46)，我们就证明了例4.

现在我们来证明不等式(3.46).

读者容易看出：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)-1\right]$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)$$

$$+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{C}{2}\right)-\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=2\cos\frac{1}{4}(\pi+A+B)\cos\frac{1}{4}(A-B)$$

$$-2\sin\frac{1}{4}(\pi+C)\sin\frac{C}{4}$$

$$=2\sin\frac{C}{4}\left[\cos\frac{1}{4}(A-B)-\cos\frac{1}{4}(A+B)\right]$$

$$\left(\text{由于}\ \frac{1}{4}(\pi+A+B)+\frac{C}{4}=\frac{\pi}{2},\right.$$

$$\left.\frac{1}{4}(\pi+C)+\frac{1}{4}(A+B)=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4}>0. \tag{3.47}$$

另外，在(3.37)中令 $x=\frac{A}{2}$，$y=\frac{B}{2}$，$z=\frac{C}{2}$，那么，有

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-1$$

$$=4\sin\frac{1}{4}(A+B)\sin\frac{1}{4}(A+C)$$

$$\cdot\sin\frac{1}{4}(B+C)>0. \qquad (3.48)$$

从(3.47)和(3.48)，知道(3.46)成立.

在例 4 的证明中，我们也建立了有趣的不等式(3.46).

例 5 设 a, b 是正常数，$0<x<\frac{\pi}{2}$, n 是自然数，求证：

$$\frac{a}{\sin^n x}+\frac{b}{\cos^n x}\geqslant\left(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{2}}.$$

证明

$$\left(\frac{a}{\sin^n x}+\frac{b}{\cos^n x}\right)^{\frac{2}{n+2}}$$

$$=\left(\frac{a}{\sin^n x}+\frac{b}{\cos^n x}\right)^{\frac{2}{n+2}}(\sin^2 x+\cos^2 x)^{\frac{n}{n+2}}$$

$$\geqslant\left(\frac{a}{\sin^n x}\right)^{\frac{2}{n+2}}(\sin^2 x)^{\frac{n}{n+2}}+\left(\frac{b}{\cos^n x}\right)^{\frac{2}{n+2}}(\cos^2 x)^{\frac{n}{n+2}}$$

(利用 Hölder 不等式)

$$=a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}. \qquad (3.49)$$

两端 $\frac{n+2}{2}$ 次方，得例 5.

利用例 5 直接可以得出上节习题 26 的结果，只要在习题 26 中，令

$$x=\frac{1}{2}\sin^2 A,\left(0<A<\frac{\pi}{2}\right),\ y=\cos^2 A.$$

那么，利用例 5($a=2$, $b=1$, $n=2$).

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{\sin^2 A}+\frac{1}{\cos^2 A}\geqslant(\sqrt{2}+1)^2. \qquad (3.50)$$

例 6 A 是锐角，求证：

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\cos A}\right)\geqslant 3+2\sqrt{2}.$$

证明 利用第一节不等式(1.71)，有

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\cos A}\right)}\geqslant 1+\frac{1}{\sqrt{\sin A\cos A}}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2A}}\geqslant 1+\sqrt{2}. \tag{3.51}$$

(3.51)两边平方，得例6.

例7 $0<x<\frac{\pi}{2}$，求证：

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{4}{\sin^4 x}+\frac{4}{\cos^4 x}\geqslant\frac{65}{2}.$$

证明 $\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{4}{\sin^4 x}+\frac{4}{\cos^4 x}$

$$=\left(\sin^2 x+\frac{2}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{2}{\cos^2 x}\right)^2-8$$

$$\geqslant 2\left[\frac{1}{2}(\sin^2 x+\cos^2 x)+\frac{4}{\sin^2 x+\cos^2 x}\right]^2-8$$

(利用第一节不等式(1.75))

$$=2\left(\frac{1}{2}+4\right)^2-8=\frac{65}{2}. \tag{3.52}$$

例8 A、B是两个锐角，求证：

$$\sin^3 A+\cos^3 A\cos^3 B+\cos^3 A\sin^3 B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

证明 利用Hölder不等式，有

$$(\sin^3 A+\cos^3 A\cos^3 B+\cos^3 A\sin^3 B)^{\frac{2}{3}}(1+1+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\geqslant(\sin^3 A)^{\frac{2}{3}}+(\cos^3 A\cos^3 B)^{\frac{2}{3}}+(\cos^3 A\sin^3 B)^{\frac{2}{3}}$$

$$=1.$$

于是例8成立. (3.53)

例 9 x 是锐角，n 是自然数，求证：

$$\left(\frac{1}{\sin^{2n}x}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{2n}x}-1\right)\geqslant(2^n-1)^2.$$

证明 显然，我们有

$$1-\sin^{2n}x=(1-\sin^2x)(1+\sin^2x+\sin^4x+\cdots+\sin^{2n-2}x)$$
$$=\cos^2x(1+\sin^2x+\sin^4x+\cdots+\sin^{2n-2}x). \qquad (3.54)$$

$$1-\cos^{2n}x=(1-\cos^2x)$$
$$\cdot(1+\cos^2x+\cos^4x+\cdots+\cos^{2n-2}x)$$
$$=\sin^2x(1+\cos^2x+\cos^4x+\cdots+\cos^{2n-2}x). \qquad (3.55)$$

于是，

$$\left(\frac{1}{\sin^{2n}x}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{2n}x}-1\right)$$
$$=\frac{1-\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x}\cdot\frac{1-\cos^{2n}x}{\cos^{2n}x}$$
$$=\frac{1}{\sin^{2n-2}x}(1+\sin^2x+\sin^4x+\cdots+\sin^{2n-2}x)$$
$$\cdot\frac{1}{\cos^{2n-2}x}(1+\cos^2x+\cos^4x+\cdots+\cos^{2n-2}x)$$
$$=\left(1+\frac{1}{\sin^2x}+\cdots+\frac{1}{\sin^{2n-4}x}+\frac{1}{\sin^{2n-2}x}\right)$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{\cos^2x}+\cdots+\frac{1}{\cos^{2n-4}x}+\frac{1}{\cos^{2n-2}x}\right)$$
$$\geqslant\left[1+\frac{1}{\sin x\cos x}+\cdots+\frac{1}{(\sin x\cos x)^{n-2}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(\sin x\cos x)^{n-1}}\right]^2 \text{（利用 Cauchy 不等式(2.58).）}$$
$$=\left[1+\frac{2}{\sin 2x}+\cdots+\frac{2^{n-2}}{(\sin2x)^{n-2}}+\frac{2^{n-1}}{(\sin2x)^{n-1}}\right]^2$$
$$\geqslant(1+2+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1})^2 \text{（利用 } 0<\sin2x\leqslant1\text{）}$$
$$=(2^n-1)^2. \qquad (3.56)$$

利用不等式，还能解三角方程，读者请看下例：

例 10 $0\leqslant x<2\pi$，自然数 $n\geqslant 2$，解方程：

$$\sin x\sin 2x\cdots\sin nx+\cos x\cos 2x\cdots\cos nx=1.$$

解 由第一节不等式(1.71)，有

$$\sqrt[n]{(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 2x+\cos^2 2x)\cdots(\sin^2 nx+\cos^2 nx)}$$
$$\geqslant\sqrt[n]{\sin^2 x\sin^2 2x\cdots\sin^2 nx}$$
$$+\sqrt[n]{\cos^2 x\cos^2 2x\cdots\cos^2 nx}. \quad (3.57)$$

（如果有些项是0，上述不等式也成立，实际上(1.71)对非负实数成立.）

但是，$\quad |\sin x\sin 2x\cdots\sin nx|\leqslant 1.$

那么，

$$|\sin x\sin 2x\cdots\sin nx|^{1-\frac{2}{n}}\leqslant 1. \quad (3.58)$$

这表明

$$|\sin x\sin 2x\cdots\sin nx|$$
$$\leqslant\sqrt[n]{\sin^2 x\sin^2 2x\cdots\sin^2 nx}. \quad (3.59)$$

同理，有

$$|\cos x\cos 2x\cdots\cos nx|$$
$$\leqslant\sqrt[n]{\cos^2 x\cos^2 2x\cdots\cos^2 nx}. \quad (3.60)$$

从(3.57)（注意(3.57)左端是1）、(3.59)和(3.60)，并且兼顾方程本身，我们有

$$1\geqslant|\sin x\sin 2x\cdots\sin nx|$$
$$+|\cos x\cos 2x\cdots\cos nx|\geqslant 1. \quad (3.61)$$

这表明(3.61)、(3.57)到(3.60)中的一切不等式都取等式.

如果 $\sin x$，$\sin 2x$，…，$\sin nx$ 之中有一个为0，那么从方程，有

$$\cos x\cos 2x\cdots\cos nx=1. \tag{3.62}$$

满足(3.62)的解 $x=0$, 当 $n=4k-1$(k 是自然数)时，还有一解 $x=\pi$.

同理，如果 $\cos x$, $\cos 2x$, …, $\cos nx$ 之中有一个为 0. 那么，从方程，有

$$\sin x\sin 2x\cdots\sin nx=1. \tag{3.63}$$

于是对于 $k=1, 2, \cdots, n$, 有 $\sin kx=\pm 1$, 这是不可能有解的.

最后考虑 $\sin x$, $\sin 2x$, …, $\sin nx$; $\cos x$, $\cos 2x$, …, $\mathrm{con}\, nx$ 全部不为 0 的情况. 由于(3.57)取等号，根据第一节不等式(1.71)取等号的条件，有

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}=\cdots=\frac{\sin^2 nx}{\cos^2 nx}. \tag{3.64}$$

那么，$\mathrm{tg}^2 x=\mathrm{tg}^2 kx$($k=2, 3, \cdots, n$)，这表明 $\mathrm{tg}\, kx=\pm\mathrm{tg}\, x$. $kx=p\pi\pm x$ (p 是整数). 因而 x, $2x$, …, nx 全是 π 的倍数，这导致 $\mathrm{tg}\, x=0$. 与我们最后考虑的情况不符合.（因为这时候 $\sin x=0$, 而我们设 $\sin x$, $\sin 2x$ 等等都不为 0.）
所以，方程的解是 $x=0$, 当 $n=4k-1$(k 是自然数)时，还有一解 $x=\pi$.

现在，我们再来观察 $\triangle ABC$, 我们先介绍一个在三角与几何中都很有用的不等式.

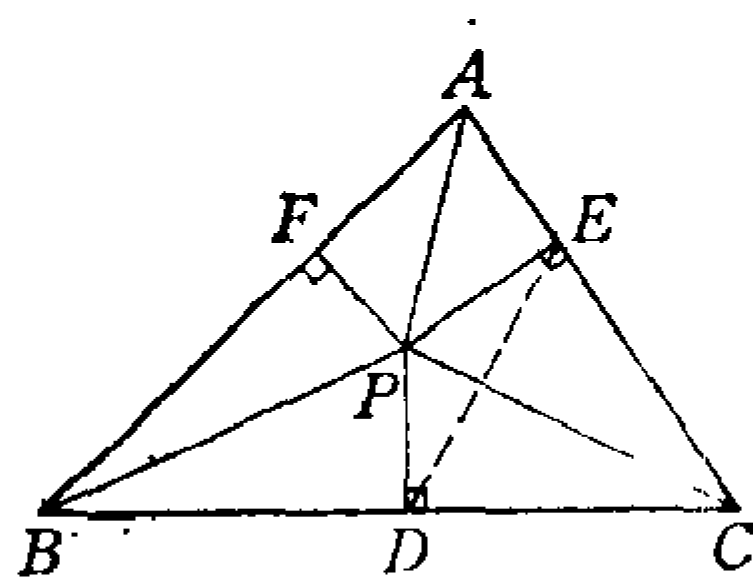


图 2

例 11 （爱尔多斯-莫德尔(Erdös-Mordell)不等式)如图2, P 为 $\triangle ABC$ 内部一点, P 到三边距离为 PD, PE 和 PF, 求证: $PA+PB+PC\geqslant 2(PD+PE+PF)$.

证明 设 $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$, $PD=a^*$, $PE=b^*$,

$PF=c^*$.

由于P、D、C、E四点共圆，在$\triangle PDE$中，$\angle DPE=\pi-C$，利用余弦定理，有

$$DE=\sqrt{a^{*2}+b^{*2}-2a^*b^*\cos(\pi-C)}$$
$$=\sqrt{a^{*2}+b^{*2}-2a^*b^*\cos(A+B)}$$
$$=\sqrt{(a^*\sin B+b^*\sin A)^2+(a^*\cos B-b^*\cos A)^2}$$
$$\geqslant a^*\sin B+b^*\sin A. \tag{3.65}$$

P、D、C、E四点共圆，由于$\angle PEC=\angle PDC=\frac{\pi}{2}$，则$PC$是这圆的直径．在$\triangle CDE$中，利用正弦定理，有

$$DE=PC\sin C=z\sin C. \tag{3.66}$$

于是，

$$z=\frac{DE}{\sin C}\geqslant\frac{a^*\sin B+b^*\sin A}{\sin C}. \tag{3.67}$$

同理，有

$$x\geqslant\frac{b^*\sin C+c^*\sin B}{\sin A}, \tag{3.68}$$

$$y\geqslant\frac{a^*\sin C+c^*\sin A}{\sin B}. \tag{3.69}$$

上面三式相加，可以得到

$$x+y+z\geqslant a^*\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)$$
$$+b^*\left(\frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}\right)+c^*\left(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\right)$$
$$\geqslant 2(a^*+b^*+c^*)\quad(\text{利用 } A_2\geqslant G_2). \tag{3.70}$$

这就是要证明的不等式．

Erdös-Mordell 不等式的一个简单应用是可以推出下述三角不等式．

例 12 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\cos A+\cos B+\cos C \geqslant 2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A).$$

证明 取 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心，由于 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，P 必在 $\triangle ABC$ 内部(图 3).

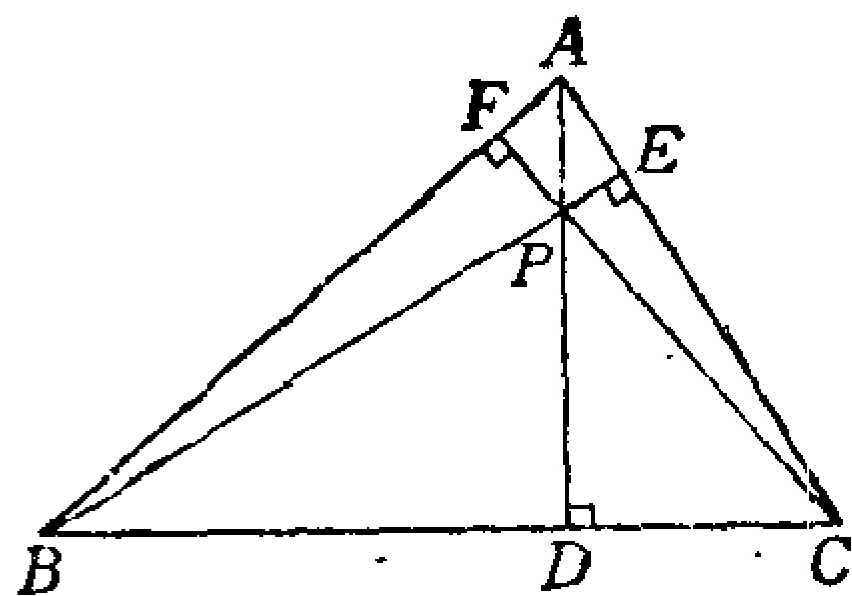


图 3

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R. 在直角 $\triangle ABE$ 中，

$$AE=AB\cos A=2R\sin C\cos A.$$

那么，在直角 $\triangle PAE$ 中，

$$PA=\frac{AE}{\cos\angle PAE}=\frac{AE}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)}=\frac{AE}{\sin C}=2R\cos A. \tag{3.71}$$

同理，我们有

$$PB=2R\cos B,\quad PC=2R\cos C. \tag{3.72}$$

在直角 $\triangle PAE$ 中，

$$PE=PA\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=2R\cos A\cos C, \tag{3.73}$$

同理，有

$$PD=PB\cos C=2R\cos B\cos C,$$

$$PF=PB\cos A=2R\cos B\cos A. \tag{3.74}$$

利用 Erdös–Mordell 不等式，应当有

$$2R(\cos A+\cos B+\cos C) \geqslant 4R(\cos B\cos C+\cos A\cos C+\cos A\cos B). \tag{3.75}$$

这样，我们就得到了所要的不等式.

由于

$$
\begin{aligned}
&2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)\\
&=\cos(A+B)+\cos(A-B)+\cos(B+C)\\
&\quad+\cos(B-C)+\cos(C+A)+\cos(C-A)\\
&=[\cos(A-B)+\cos(B-C)\\
&\quad+\cos(C-A)]-(\cos A+\cos B+\cos C).
\end{aligned}
$$

这里我们利用

$$
\begin{aligned}
&\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C,\\
&\cos(B+C)=-\cos A,\\
&\cos(C+A)=-\cos B.
\end{aligned}
$$

再利用例 12，我们有了一个新的三角不等式，在锐角 $\triangle ABC$ 中，

$$
\begin{aligned}
&2(\cos A+\cos B+\cos C)\\
&\quad\geqslant\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A).
\end{aligned}\tag{3.76}
$$

另外，

$$
\begin{aligned}
&3(\cos A+\cos B+\cos C)\\
&\quad-2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)\\
&=\cos A+\cos B+\cos C+2(\cos A-\sin B\sin C)\\
&\quad+2(\cos B-\sin A\sin C)+2(\cos C-\sin A\sin B)\\
&=\cos A+\cos B+\cos C-2[\cos(B+C)+\sin B\sin C]\\
&\quad-2[\cos(A+C)+\sin A\sin C]\\
&\quad-2[\cos(A+B)+\sin A\sin B]\\
&=\cos A+\cos B+\cos C-2(\cos B\cos C\\
&\quad+\cos A\cos C+\cos A\cos B)\\
&\geqslant 0\text{（利用例 12 的不等式）}.
\end{aligned}\tag{3.77}
$$

这样，一个三角不等式产生了，在锐角 $\triangle ABC$ 中，

$$3(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$\geqslant 2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A). \quad (3.78)$$

例 13 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{1}{2}<\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{3}{4}.$$

证明 令

$$A^*=\frac{1}{2}(\pi-A),\quad B^*=\frac{1}{2}(\pi-B),$$
$$C^*=\frac{1}{2}(\pi-C). \quad (3.79)$$

那么 $\frac{\pi}{4}<A^*,\ B^*,\ C^*<\frac{\pi}{2}$，如果已知 $\triangle ABC$ 不是锐角三角形，那么可以得到 $0<A^*,\ B^*,\ C^*<\frac{\pi}{2}$. 从(3.79)，有

$$A^*+B^*+C^*=\pi. \quad (3.80)$$

以 A^*, B^*, C^* 为三角，可以作一个新的锐角三角形 $A^*B^*C^*$，当然这样的新三角形有无数个，但它们彼此都是相似的.

对于锐角 $\triangle A^*B^*C^*$，利用例 12 中的不等式，应当有

$$\cos A^*+\cos B^*+\cos C^*$$
$$\geqslant 2(\cos A^*\cos B^*+\cos B^*\cos C^*$$
$$+\cos C^*\cos A^*). \quad (3.81)$$

再利用(3.79)，有

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\geqslant 2\Big(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$
$$+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\Big). \quad (3.82)$$

利用不等式(3.3)($n=1$ 情况)，我们可以看到

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant 3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}. \quad (3.83)$$

结合(3.82)和(3.83)，有

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{3}{4}. \quad (3.84)$$

现在证前一个不等式，不失一般性，假定 $A\geqslant B\geqslant C$，那么

$$\frac{\pi}{3}\leqslant A<\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\frac{1}{2}(B-C)<\frac{1}{2}A,$$

$$0\leqslant\frac{1}{4}(B-C)<\frac{1}{4}A.$$

$$\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{1}{4}(B+C)\cos\frac{1}{4}(B-C)$$

$$+\frac{1}{2}\left[-\cos\frac{1}{2}(B+C)+\cos\frac{1}{2}(B-C)\right]$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{1}{4}(\pi-A)\cos\frac{1}{4}(B-C)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{2}(B-C)-\sin\frac{A}{2}\right]$$

$$>2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{1}{4}(\pi-A)\cos\frac{A}{4}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{A}{2}\left(2\cos^2\frac{A}{4}-2\sin\frac{A}{4}\cos\frac{A}{4}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+1-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\cdot\left(1+\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}-\sqrt{2}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\left(\text{由于}\ \frac{A}{2}<\frac{\pi}{4},\ \text{则}\ \cos\frac{A}{2}>\sin\frac{A}{2},\right.$$

$$\text{又由于}\ \frac{A}{2}\geqslant\frac{\pi}{6},\quad \sin\frac{A}{2}\geqslant\frac{1}{2},\quad \text{则}$$

$$\left.1+\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}-\sqrt{2}>0.\right)$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}. \tag{3.85}$$

例 13 证明中的角度的变换是很有意义的，例如在 $\triangle A^*B^*C^*$ 中，利用本节例 2 的结果，应有

$$2(\operatorname{ctg}A^*+\operatorname{ctg}B^*+\operatorname{ctg}C^*)$$
$$\geqslant\csc A^*+\csc B^*+\csc C^*. \tag{3.86}$$

利用(3.79)，有一个新的三角不等式，在 $\triangle ABC$ 中，

$$2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\geqslant\sec\frac{A}{2}$$
$$+\sec\frac{B}{2}+\sec\frac{C}{2}. \tag{3.87}$$

例 14 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A$$
$$-2\cos A\cos B\cos C<\frac{1}{2}.$$

证明 不妨设 $A\geqslant B\geqslant C$，那么，

$$\frac{\pi}{3}\leqslant A<\frac{\pi}{2},\quad \cos A\leqslant\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A$$
$$-2\cos A\cos B\cos C$$
$$=\cos A(\cos B+\cos C)+\cos B\cos C(1-2\cos A)$$

$$=2\cos A\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)$$

$$+\frac{1}{2}(1-2\cos A)[\cos(B+C)+\cos(B-C)]$$

$$\leqslant 2\cos A\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}(1-2\cos A)(1-\cos A)$$

$$=2\cos A\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}(1-3\cos A+2\cos^2 A)$$

$$=\frac{1}{2}+\cos A\left(\cos A+2\sin\frac{A}{2}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\cos A\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\cos A\left(2\sin\frac{A}{2}-2\sin^2\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}$$

$$\left(利用\ 2\sin^2\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\geqslant 2\sqrt{2\sin^2\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2}}=2\sin\frac{A}{2}\right).$$

(3.88)

例 14 的证明方法酷似上例的估计下界的方法．固定一个角，例如 A，然后逐步消去 B、C 两角，这种方法很基本，但运用这种方法要有一定的耐心和能力，希望读者能逐步掌握它。

例 14 的结果很重要，有了它，可以推出几个三角不等式．

例 15 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+\cos A\cos B$

$$+\cos B\cos C+\cos C\cos A\leqslant\frac{3}{2}.$$

(2) $\cos A+\cos B+\cos C$

$$\geqslant 2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right).$$

(3) $\cos\frac{1}{2}(B-C)+\cos\frac{1}{2}(C-A)+\cos\frac{1}{2}(A-B)$

$$\leqslant\cos A+\cos B+\cos C+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

$$\leqslant 3.$$

证明 (1)

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+\cos A\cos B$$
$$+\cos B\cos C+\cos C\cos A$$
$$=\frac{1}{2}(1+\cos 2A)+\frac{1}{2}(1+\cos 2B)+\frac{1}{2}(1+\cos 2C)$$
$$+\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)+\cos A\cos B$$
$$+\cos B\cos C+\cos C\cos A$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1-4\cos A\cos B\cos C)$$
$$+\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A$$
$$=1+(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A$$
$$-2\cos A\cos B\cos C)\leqslant\frac{3}{2}. \tag{3.89}$$

(2) 利用角度的变换(3.79),在锐角 $\triangle A^*B^*C^*$ 中,利用上述已证不等式,应当有

$$\cos^2 A^*+\cos^2 B^*+\cos^2 C^*+\cos A^*\cos B^*$$
$$+\cos B^*\cos C^*+\cos C^*\cos A^*\leqslant\frac{3}{2}. \tag{3.90}$$

于是,利用(3.79),可以得到

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$
$$+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{3}{2}. \tag{3.91}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C-2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right.$$

$$\left.+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)+\left(1-2\sin^2\frac{B}{2}\right)+\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$-2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=3-2\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right.$$

$$\left.+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\geqslant 0$$

（利用 (3.91)）. (3.92)

所以，我们有

$$\cos A+\cos B+\cos C$$

$$\geqslant 2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right). \tag{3.93}$$

(3) 从本节不等式(3.7)和(3.83)，有

$$\cos A+\cos B+\cos C+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

$$\leqslant\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3. \tag{3.94}$$

而

$$\cos A+\cos B+\cos C+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

$$-\left[\cos\frac{1}{2}(B-C)+\cos\frac{1}{2}(C-A)+\cos\frac{1}{2}(A-B)\right]$$

$$=\cos A+\cos B+\cos C+\left[\cos\frac{1}{2}(B+C)-\cos\frac{1}{2}(B-C)\right]$$

$$+\left[\cos\frac{1}{2}(C+A)-\cos\frac{1}{2}(C-A)\right]$$

$$+\left[\cos\frac{1}{2}(A+B)-\cos\frac{1}{2}(A-B)\right]$$

$$=\cos A+\cos B+\cos C$$

$$-2\left(\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$\geqslant 0（利用(3.93)）. \tag{3.95}$$

例 16 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\cos\frac{1}{2}(B-C)+\cos\frac{1}{2}(C-A)+\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right).$$

证明 利用(3.79)角度变换的技巧，有

$$\cos\frac{1}{2}(B-C)+\cos\frac{1}{2}(C-A)+\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$=\cos(C^*-B^*)+\cos(A^*-C^*)+\cos(B^*-A^*)$$

$$=(\cos B^*\cos C^*+\cos A^*\cos C^*+\cos A^*\cos B^*)$$

$$+(\sin B^*\sin C^*+\sin A^*\sin C^*+\sin A^*\sin B^*)$$

$$=\frac{1}{2}(\cos A^*+\cos B^*+\cos C^*)^2$$

$$-\frac{1}{2}(\cos^2 A^*+\cos^2 B^*+\cos^2 C^*)$$

$$+\frac{1}{2}(\sin A^*+\sin B^*+\sin C^*)^2$$

$$-\frac{1}{2}(\sin^2 A^*+\sin^2 B^*+\sin^2 C^*)$$

$$=\frac{1}{2}(\cos A^*+\cos B^*+\cos C^*)^2$$

$$+\frac{1}{2}(\sin A^*+\sin B^*+\sin C^*)^2-\frac{3}{2}. \tag{3.96}$$

读者都知道，在 $\triangle A^*B^*C^*$ 中，

$$\cos A^*+\cos B^*+\cos C^*$$
$$=1+4\sin\frac{A^*}{2}\sin\frac{B^*}{2}\sin\frac{C^*}{2}. \tag{3.97}$$
$$\sin A^*+\sin B^*+\sin C^*$$
$$=4\cos\frac{A^*}{2}\cos\frac{B^*}{2}\cos\frac{C^*}{2}. \tag{3.98}$$

令

$$x=4\sin\frac{A^*}{2}\sin\frac{B^*}{2}\sin\frac{C^*}{2},$$
$$y=4\cos\frac{A^*}{2}\cos\frac{B^*}{2}\cos\frac{C^*}{2}. \tag{3.99}$$

从(3.5)知道 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$，从(3.1)和(3.98)，有 $y\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$

显然地，由于 $\triangle A^*B^*C^*$ 是锐角三角形，我们有

$$\sin A^*+\sin B^*+\sin C^*>\sin^2 A^*+\sin^2 B^*+\sin^2 C^*$$
$$>2 \quad (\text{见}(3.10)). \tag{3.100}$$

于是 $y>2$.

把以上结果用到(3.96)，有

$$\cos\frac{1}{2}(B-C)+\cos\frac{1}{2}(C-A)+\cos\frac{1}{2}(A-B)$$
$$=\frac{1}{2}(1+x)^2+\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{2}. \tag{3.101}$$

而

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=\sin A^*+\sin B^*+\sin C^*=y, \tag{3.102}$$

所以，我们有

$$\cos\frac{1}{2}(B-C)+\cos\frac{1}{2}(C-A)+\cos\frac{1}{2}(A-B)$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1+x)^2+\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}y$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\left(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\leqslant 0 \quad \left(\text{利用 } 0<x\leqslant\frac{1}{2},\ 2<y\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}\right). \tag{3.103}$$

下面我们再举四个例题，它们风格各不相同，读者可以从中受到一些启示.

例 17 已知 $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi(1\leqslant i\leqslant n)$，和 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i=\pi$，自然数 $n\geqslant3$，求证：$\sum_{i=1}^{n}\sin^2\theta_i\leqslant\frac{9}{4}$.

证明

$$\sum_{i=1}^{n}\sin^2\theta_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(1-\cos2\theta_i)$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\cos2\theta_i \tag{3.104}$$

这里 $\sum_{i=1}^{n}2\theta_i=2\pi$.

当 $n\geqslant4$ 时，则在 $2\theta_1$，$2\theta_2$，…，$2\theta_n$ 中一定有两个，不妨设为 $2\theta_1$，$2\theta_2$，$2\theta_1+2\theta_2\leqslant\pi$，$\theta_1+\theta_2\leqslant\frac{\pi}{2}$. 利用余弦函数在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 内是单调递降函数，我们有

$$\cos(\theta_1+\theta_2)\leqslant\cos(\theta_1-\theta_2).$$

于是，

$$\cos2(\theta_1+\theta_2)+1=2\cos^2(\theta_1+\theta_2)$$

$$\leqslant2\cos(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$=\cos2\theta_1+\cos2\theta_2. \tag{3.105}$$

用 $2(\theta_1+\theta_2)$ 与 0 两个角代替 $2\theta_1$，$2\theta_2$，从(3.105)和(3.104)

可以看到 $\sum_{i=1}^{n}\sin^2\theta_i$ 的值增大了．不断重复上述替代方法，不断增大 $\sum_{i=1}^{n}\sin^2\theta_i$ 的值．因此，有

$$\sum_{i=1}^{n}\sin^2\theta_i\leqslant\sin^2\theta_1^*+\sin^2\theta_2^*+\sin^2\theta_3^*. \qquad (3.106)$$

这里 $\theta_1^*+\theta_2^*+\theta_3^*=\pi$．从(3.9)和(3.10)，读者容易看到

$$\sin^2\theta_1^*+\sin^2\theta_2^*+\sin^2\theta_3^*\leqslant\frac{9}{4}. \qquad (3.107)$$

这样例 17 就得到了证明．

例 18　对于 x 和 α 的一切实数值，求证．

$$\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})\leqslant\frac{x^2+x\sin\alpha+1}{x^2+x\cos\alpha+1}\leqslant\frac{1}{3}(4+\sqrt{7}).$$

证明　令

$$y=\frac{x^2+x\sin\alpha+1}{x^2+x\cos\alpha+1}. \qquad (3.108)$$

由于 $\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})<1<\frac{1}{3}(4+\sqrt{7})$，因而只考虑 $y\neq1$ 情况．从上式，

$$(y-1)x^2+(y\cos\alpha-\sin\alpha)x+(y-1)=0. \qquad (3.109)$$

由于 x 是实数，上述关于 x 的一元二次方程的判别式应当非负，因而有

$$(y\cos\alpha-\sin\alpha)^2-4(y-1)^2\geqslant0. \qquad (3.110)$$

从上式，有

$$(4-\cos^2\alpha)y^2+(\sin2\alpha-8)y+4-\sin^2\alpha\leqslant0. \qquad (3.111)$$

由于 $4-\cos^2\alpha\geqslant3$，因而 y 的值在一元二次方程

$$(4-\cos^2\alpha)y^2+(\sin2\alpha-8)y+4-\sin^2\alpha=0 \qquad (3.112)$$

的两个根之间．

(3.112)可以因式分解为

$$[(2+\cos\alpha)y-(2+\sin\alpha)]$$
$$\cdot[(2-\cos\alpha)y-(2-\sin\alpha)]=0. \qquad (3.113)$$

所以(3.112)的两个根分别是$\dfrac{2+\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$, $\dfrac{2-\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$.

令

$$z=\frac{2\pm\sin\alpha}{2\pm\cos\alpha} \quad \text{(同时取+号或同时取−号)}. \qquad (3.114)$$

于是,

$$2z\pm z\cos\alpha=2\pm\sin\alpha,$$
$$\pm z\cos\alpha\mp\sin\alpha=2(1-z). \qquad (3.115)$$

读者都知道

$$|\pm z\cos\alpha\mp\sin\alpha|\leqslant\sqrt{z^2+1}. \qquad (3.116)$$

从(3.116)和(3.115),有

$$4(1-z)^2\leqslant z^2+1. \qquad (3.117)$$

展开后,可以得到

$$3z^2-8z+3\leqslant 0. \qquad (3.118)$$

即

$$3\left[z-\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})\right]\cdot\left[z-\frac{1}{3}(4+\sqrt{7})\right]\leqslant 0. \qquad (3.119)$$

那么,

$$\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})\leqslant z\leqslant\frac{1}{3}(4+\sqrt{7}). \qquad (3.120)$$

从而,有

$$\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}(4+\sqrt{7}). \qquad (3.121)$$

例19 求$\sin^{10}x+A\sin^2x\cos^2x+\cos^{10}x$的最大值与最小值. 这里常数$A\geqslant 5$.

解

$$y=\sin^{10}x+A\sin^2x\cos^2x+\cos^{10}x$$
$$=\left[\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5\right]+\frac{A}{4}\sin^2 2x$$
$$=\frac{1}{32}(2+20\cos^2 2x+10\cos^4 2x)+\frac{A}{4}(1-\cos^2 2x)$$

$$=\frac{1}{32}[10\cos^4 2x+(20-8A)\cos^2 2x+(2+8A)]$$

$$=\frac{5}{16}\left[\cos^2 2x+\left(1-\frac{2}{5}A\right)\right]^2+\frac{1}{16}(1+4A)$$

$$-\frac{5}{16}\left(1-\frac{2}{5}A\right)^2$$

$$=\frac{5}{16}\left[\cos^2 2x+\left(1-\frac{2}{5}A\right)\right]^2$$

$$+\frac{A}{20}(10-A)-\frac{1}{4}. \qquad (3.122)$$

由于常数$A\geqslant5$，那么$1-\frac{2}{5}A\leqslant-1$．当$\cos^2 2x=0$时，$y$有最大值

$$\frac{5}{16}\left(1-\frac{2}{5}A\right)^2+\frac{A}{20}(10-A)-\frac{1}{4}=\frac{1}{16}(1+4A).$$

当$\cos^2 2x=1$时，y有最小值

$$\frac{5}{16}\left(2-\frac{2}{5}A\right)^2+\frac{A}{20}(10-A)-\frac{1}{4}=1.$$

当常数$A<5$，情况又怎样呢？有兴趣的读者不妨研究一下．

例 20 任给13个不同的实数a_1，a_2，…，a_{13}，求证：其中至少存在两个不同实数a_i，$a_j(1\leqslant i<j\leqslant13)$，满足下述不等式

$$0<\frac{a_i-a_j}{1+a_ia_j}<\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

证明

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}. \qquad (3.123)$$

a_1，a_2，…，a_{13}是13个不同的实数，令$a_k=\operatorname{tg}\theta_k(1\leqslant k\leqslant13)$，

$-\frac{\pi}{2}<\theta_k<\frac{\pi}{2}$，把开区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$12等分，分成12个长度为$\frac{\pi}{12}$的小区间：$\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{5}{12}\pi\right]$，$\left(-\frac{5}{12}\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$，…，$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{12}\pi\right]$，$\left(\frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$。由于有13个不同的$\theta_k$，那么至少有两个$\theta_i$与$\theta_j$($\theta_j<\theta_i$)落入同一个小区间内．于是，我们有

$$0<\theta_i-\theta_j<\frac{\pi}{12}. \tag{3.124}$$

而正切函数在$\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$内是单调递增的，从而有

$$0<\operatorname{tg}(\theta_i-\theta_j)<\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}.$$

由于 $\operatorname{tg}(\theta_i-\theta_j)=\frac{\operatorname{tg}\theta_i-\operatorname{tg}\theta_j}{1+\operatorname{tg}\theta_i\operatorname{tg}\theta_j}=\frac{a_i-a_j}{1+a_i a_j}$，则

$$0<\frac{a_i-a_j}{1+a_i a_j}<\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}. \tag{3.125}$$

习 题 三

1．在锐角$\triangle ABC$中，求证：

$$2<\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\leqslant 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

（提示：利用$\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}>\sin A+\sin B+\sin C$，和注意$f(x)=-\sqrt{x}$ $(x>0)$是凸函数．）

2．在锐角$\triangle ABC$中，求证：

(1) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\frac{1}{2}<\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}$.

（提示：利用$f(x)=-\sin x$ $(0\leqslant x<\pi)$是凸函数．对于(2)，利用

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

并且注意(3.100)和(3.1).)

3. 在$\triangle ABC$中,求证:

(1) $\sin A+\sin B+\sin C\geqslant 4\sin A\sin B\sin C$.

(2) $\dfrac{3}{4}\leqslant\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}<1$.

(提示: (1) 利用习题2的提示及(3.5). (2) 利用

$\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1-2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.)

4. 在$\triangle ABC$中,求证:

(1) $\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}\,\mathrm{tg}\dfrac{B}{2}\,\mathrm{tg}\dfrac{C}{2}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

(2) $\mathrm{ctg}^2\dfrac{A}{2}+\mathrm{ctg}^2\dfrac{B}{2}+\mathrm{ctg}^2\dfrac{C}{2}\geqslant 9$.

(3) $\csc\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{B}{2}+\csc\dfrac{C}{2}\geqslant 6$.

(提示: (1) 利用 $\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}\mathrm{tg}\dfrac{B}{2}+\mathrm{tg}\dfrac{B}{2}\mathrm{tg}\dfrac{C}{2}+\mathrm{tg}\dfrac{C}{2}\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}=1$, 和 $A_3\geqslant G_3$. (2) 利用第一节不等式(1.66)及本节例1. (3) 利用第一节(1.81).)

5. 在$\triangle ABC$中,求证:

(1) $\mathrm{ctg}^n\dfrac{A}{2}+\mathrm{ctg}^n\dfrac{B}{2}+\mathrm{ctg}^n\dfrac{C}{2}\geqslant 3^{\frac{n}{2}+1}$.

(2) $\mathrm{tg}^n\dfrac{A}{2}+\mathrm{tg}^n\dfrac{B}{2}+\mathrm{tg}^n\dfrac{C}{2}\geqslant 3^{1-\frac{n}{2}}$. (本题$n$是自然数.)

(提示: 利用第一节(1.65),和本节例1.)

6. 在$\triangle ABC$中,求证:

$$\mathrm{ctg}\,A+\mathrm{ctg}\,B+\mathrm{ctg}\,C-3\,\mathrm{ctg}\,A\,\mathrm{ctg}\,B\,\mathrm{ctg}\,C\geqslant\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

(提示: 利用例1.)

7. 在$\triangle ABC$中,求证:

$$\sin A+\sin B+\sin C\geqslant\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C.$$

(提示: $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$,

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$. 再利用(3.5).)

8. 在锐角$\triangle ABC$中，求证：

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2\leqslant\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}.$$

（提示：利用例15(2).）

9. 在$\triangle ABC$中，已知AC上的中线BD与AB边上的中线CE互相垂直，求证：$\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\geqslant\frac{2}{3}$.

（提示：连第三条中线，并且作BC上的高AK.）

10. n是自然数，x是实数，求证：$|\sin nx|\leqslant n|\sin x|$.

（提示：用数学归纳法.）

11. n是自然数，a, b是实数，求证：

$$|\cos nb\cos a-\cos na\cos b|\leqslant(n^2-1)|\cos a-\cos b|.$$

（提示：想办法利用上题.）

12. x为锐角，求证：

$$4\operatorname{tg}x+9\operatorname{ctg}^2x\geqslant3\sqrt[3]{36}.$$

（提示：对$2\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}x+9\operatorname{ctg}^2x$利用$A_3\geqslant G_3$.）

13. n是自然数，求证$2^{1-n}\leqslant\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\leqslant1$.

（提示：利用第一节不等式(1.65).）

14. $0<x<\frac{\pi}{4}$，求证：$\frac{1-\sin x}{1-\cos x}>\operatorname{ctg}x$.

（提示：利用$\sin x<\cos x$和$\sin x+\cos x>1$.）

15. x是锐角，求证：$\frac{\sin 5x+\cos 3x}{\sin 4x+\cos 4x}<\sqrt{2}$.

（提示：先证明$\frac{\sin 5x+\cos 3x}{\sin 4x+\cos 4x}=\sin x+\cos x$.）

16. 求$\frac{a+b\sin x}{a+b\cos x}$的最大值与最小值，这里$a$是正常数，$b$是常数且$a>|b|$. x是实数.

（提示：参考例18.）

17. x为实数，α, β是锐角，求证：

$$\frac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}$$

的值在$\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}}$与$\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$之间.

(提示：参考例18.)

18. $0<x<\frac{\pi}{2}$,求证:$1<\cos^2 x+x\sin x<2$.

(提示：利用$x>\sin x$.注意$x<2$.)

19. m, n是两个自然数,求证:

$\sin^m x\cos^n x\leqslant\frac{1}{2}$.

20. 任给n个不同的实数a_1, a_2, …, a_n, 自然数$n\geqslant 4$.求证:其中至少存在两个不同的实数a_i, a_j.满足不等式

$0<\frac{a_i-a_j}{1+a_i a_j}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{n-1}$.

(提示:参考例20.)

四 琴生不等式的平面几何应用

本节是讲 Jensen 不等式在平面几何方面的广泛应用. 为节约篇幅，我们约定：在 $\triangle ABC$ 中，A、B、C 表示三个内角，角 A、B、C 所对应的边长分别用 a、b、c 表示. 三角形面积用 s 表示，$\triangle ABC$ 的半周长为 p，

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

h_a, h_b, h_c 分别表示边 a, b, c 上的高. m_a, m_b, m_c 分别表示边 a, b, c 上的中线. t_a, t_b, t_c 分别表示边 a, b, c 上的内角平分线. $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R, $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r. 且成立

$$s=\frac{abc}{4R}=rp.$$

例 1 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$6\sqrt{3}\,r\leqslant a+b+c\leqslant 3\sqrt{3}\,R.$$

证明 $a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$

$$\leqslant 2R\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{（利用第三节(3.1)）}$$

$$=3\sqrt{3}\,R. \tag{4.1}$$

另外，

$$\frac{a+b+c}{r}=\frac{(a+b+c)^2}{2s}$$

$$=\frac{4R^2(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{4R^2\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{4R^2\left(4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2}{32R^2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)}$$

$$=2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\geqslant 6\sqrt{3}$$

(利用第三节例 1, 注意(3.23)). (4.2)

从例 1, 我们可以得到一个基本不等式 $R\geqslant 2r$.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 求证:

$$4\sqrt{3}s\leqslant 3\sqrt[3]{abc(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$
$$\leqslant a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)$$
$$\leqslant\frac{9abc}{a+b+c}\leqslant ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2.$$

证明 由于 $a^2+b^2\geqslant 2ab$, $b^2+c^2\geqslant 2bc$, $c^2+a^2\geqslant 2ca$. 三式相加后乘以 $\frac{1}{2}$, 有

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca. \tag{4.3}$$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)$$
$$=3abc+abc\left[\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\right]$$
$$\geqslant 3abc+6abc(\text{利用 3 个 } A_2\geqslant G_2)=9abc. \tag{4.4}$$

于是, 我们有

$$ab+bc+ca\geqslant\frac{9abc}{a+b+c}. \tag{4.5}$$

令

$$p-a=x,\ p-b=y,\ p-c=z. \tag{4.6}$$

由于 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边的长,

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

所以 $x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z=p$.

$$a=p-x,\ b=p-y,\ c=p-z.$$

$$9abc-(a+b+c)[a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)]$$
$$=9(p-x)(p-y)(p-z)-2p[2(p-x)x+2(p-y)y$$
$$+2(p-z)z]$$
$$=9p(xy+yz+zx)-9xyz-4p[p^2-(x^2+y^2+z^2)]$$
$$=4p(x+y+z)^2+p(xy+yz+zx)-9xyz-4p^3$$
$$=p(xy+yz+zx)-9xyz$$
$$\geqslant(3\sqrt[3]{xyz})(3\sqrt[3]{x^2y^2z^2})-9xyz\ (\text{利用 } A_3\geqslant G_3 \text{ 和 } p=x+y+z)$$
$$=9xyz-9xyz=0. \tag{4.7}$$

所以，我们有

$$a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)\leqslant\frac{9abc}{a+b+c}. \tag{4.8}$$

利用 $A_3\geqslant G_3$，立刻有

$$a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)$$
$$\geqslant3\sqrt[3]{abc(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}. \tag{4.9}$$

本例还剩下最后一个不等式要证明．读者都知道，

$$abc=8R^3\sin A\sin B\sin C \tag{4.10}$$
$$s=2R^2\sin A\sin B\sin C. \tag{4.11}$$

那么，

$$abc=4Rs\geqslant\frac{8sp}{3\sqrt{3}}\ (\text{利用例 1}). \tag{4.12}$$

利用(4.12)，我们有

$$3\sqrt[3]{abc(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$=6\sqrt[3]{abc(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\geqslant 4\sqrt{3}\sqrt[3]{sp(p-a)(p-b)(p-c)}=4\sqrt{3}\,s. \tag{4.13}$$

例 2 很重要，在历史上，$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,s$ 是一个著名的不等式. 请读者给这个不等式一个直接的证明.

(4.6)是一个非常有用的变换公式，利用它，可以使某些问题变得简单.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$

(2) $\dfrac{1}{4}<\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\leqslant\dfrac{8}{27}.$

证明 (1) 在变换(4.6)下，我们有

$$\begin{aligned}abc&=(y+z)(z+x)(x+y)\\&\geqslant 8\sqrt{yz}\sqrt{zx}\sqrt{xy}\ (\text{利用 3 个 } A_2\geqslant G_2)\\&=8xyz=8(p-a)(p-b)(p-c)\\&=(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\\&=a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc.\end{aligned} \tag{4.14}$$

于是，我们有(1).

(2) 在变换(4.6)下，我们可以看到

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)&=(p+z)(p+x)(p+y)\\&=p^3+p^2(x+y+z)+p(xy+yz+zx)+xyz\\&=2p^3+p(xy+yz+zx)+xyz\\&>2p^3=\frac{1}{4}(a+b+c)^3.\end{aligned} \tag{4.15}$$

另一方面，我们有

$$xy+yz+zx\leqslant\frac{1}{3}(x+y+z)^2=\frac{1}{3}p^2. \tag{4.16}$$

$$xyz\leqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{1}{27}p^3. \tag{4.17}$$

于是,

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)&=2p^3+p(xy+yz+zx)+xyz\\&\leqslant 2p^3+\frac{1}{3}p^3+\frac{1}{27}p^3=\frac{64}{27}p^3\\&=\frac{8}{27}(a+b+c)^3.\end{aligned} \tag{4.18}$$

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，求证:

$$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right).$$

证明 利用第一节公式(1.66)，我们有

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{4}{3}p^2\\&=\frac{36}{35}\left[p^2+\left(\frac{2p}{3}\right)^3\frac{1}{p}\right]\\&=\frac{36}{35}\left[p^2+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\frac{1}{p}\right]\\&\geqslant\frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right)(\text{利用 }A_3\geqslant G_3).\end{aligned} \tag{4.19}$$

例 5 在 $\triangle ABC$ 中，求证:

(1) $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}s+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$.

(2) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4s}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2$.

证明 (1) 明显地，我们有

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-(b-c)^2-(c-a)^2-(a-b)^2\\&=2(bc+ca+ab)-(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

$$=a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)$$
$$\geqslant 4\sqrt{3}s\text{(利用例2)}. \tag{4.20}$$

(2) 由于

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\geqslant 0. \tag{4.21}$$

那么，有

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}. \tag{4.22}$$

而

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}$$
$$\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4s}\text{(利用例 2)}. \tag{4.23}$$

利用(4.22)和(4.23)，我们有

$$\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}\leqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{3\sqrt{3}}{4s}. \tag{4.24}$$

两边同加上 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$，并且通过移项，可以看到

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$
$$\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4s}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2. \tag{4.25}$$

例 6 已知 λ_1, λ_2, λ_3 是三个正实数，在 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}a^2+\frac{\lambda_2}{\lambda_3+\lambda_1}b^2+\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}c^2\geqslant 2\sqrt{3}s.$

(2) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}a^4+\frac{\lambda_2}{\lambda_3+\lambda_1}b^4+\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}c^4\geqslant 8s^2.$

证明 (1) 令

$$F=\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}a^2+\frac{\lambda_2}{\lambda_3+\lambda_1}b^2+\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}c^2. \tag{4.26}$$

那么，我们有

$$\begin{aligned}
&2F+(a^2+b^2+c^2)\\
&=\left(\frac{\lambda_3+\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}\right)c^2+\left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_1}+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3+\lambda_1}\right)b^2\\
&\quad+\left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_3+\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)c^2\\
&=\left(\frac{\lambda_3+\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}a^2+\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_1}b^2\right)+\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}a^2+\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}c^2\right)\\
&\quad+\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3+\lambda_1}b^2+\frac{\lambda_3+\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}c^2\right)\\
&\geqslant 2(ab+ac+bc)\text{(利用 3 个 }A_2\geqslant G_2\text{)}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

于是，

$$\begin{aligned}
2F&\geqslant 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\\
&\geqslant 4\sqrt{3}s\text{(利用(4.20))}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

立即，我们有 $F\geqslant 2\sqrt{3}s$.

(2) 类似(1)，令

$$F=\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}a^4+\frac{\lambda_2}{\lambda_3+\lambda_1}b^4+\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}c^4. \tag{4.29}$$

同样地，我们可以看到

$$\begin{aligned}
&2F+(a^4+b^4+c^4)\\
&=\left(\frac{\lambda_3+\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}a^4+\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_1}b^4\right)+\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}a^4+\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}c^4\right)\\
&\quad+\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3+\lambda_1}b^4+\frac{\lambda_3+\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}c^4\right)\\
&\geqslant 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

从(4.30)，我们有

$$2F\geqslant 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4). \tag{4.31}$$

而

$$
\begin{aligned}
16s^2 &= 16p(p-a)(p-b)(p-c)\\
&= (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\\
&= [(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2]\\
&= (a+b)^2c^2-c^4-(a+b)^2(a-b)^2+c^2(a-b)^2\\
&= 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4).
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

从(4.32)和(4.31),我们有

$$F \geqslant 8s^2. \tag{4.33}$$

例 7 正实数 $m \geqslant 1$,在 $\triangle ABC$ 中,求证:

$$\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{a+c}+\frac{c^m}{a+b} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{m-2} p^{m-1}.$$

我们先向读者介绍一个简单而有用的不等式.

车比雪夫(Chebyshev)不等式:有 $2n$ 个实数 $A_1, A_2, \cdots, A_n; B_1, B_2, \cdots, B_n$,满足条件:

$$A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots \geqslant A_n;\ B_1 \geqslant B_2 \geqslant \cdots \geqslant B_n.$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{j=1}^{n} B_j.$$

证明 显然,

$$(A_i - A_j)(B_i - B_j) \geqslant 0. \tag{4.34}$$

展开后,可以得到

$$A_iB_i + A_jB_j \geqslant A_iB_j + A_jB_i. \tag{4.35}$$

而

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A_iB_i + A_jB_j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(nA_iB_i + \sum_{j=1}^{n} A_jB_j\right)\\
&= n\sum_{i=1}^{n} A_iB_i + n\sum_{j=1}^{n} A_jB_j\\
&= 2n\sum_{i=1}^{n} A_iB_i.
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

从(4.36)和(4.35),我们有

$$2n\sum_{i=1}^{n}A_iB_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A_iB_j+A_jB_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}A_i\sum_{j=1}^{n}B_j+\sum_{i=1}^{n}B_i\sum_{j=1}^{n}A_j$$
$$=2\sum_{i=1}^{n}A_i\sum_{j=1}^{n}B_j. \tag{4.37}$$

(4.37)两边同乘以 $\frac{1}{2n}$，就得到 Chebyshev 不等式.

现在我们来解决例 7.

例 7 的证明　不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，那么

$$\frac{1}{b+c}\geqslant\frac{1}{a+c}\geqslant\frac{1}{a+b}.$$

利用第一节不等式(1.64)，我们有

$$[(b+c)+(a+c)+(a+b)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant 9. \tag{4.38}$$

于是，

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\geqslant\frac{9}{2(a+b+c)}. \tag{4.39}$$

利用刚才证明的 Chebyshev 不等式，我们可以得到

$$a^m\frac{1}{b+c}+b^m\frac{1}{a+c}+c^m\frac{1}{a+b}$$
$$\geqslant\frac{1}{3}(a^m+b^m+c^m)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)$$
$$\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^m\frac{9}{2(a+b+c)}$$

（利用幂平均不等式和(4.39)）

$$=\left(\frac{2p}{3}\right)^m\frac{9}{4p}=\left(\frac{2}{3}\right)^{m-2}p^{m-1}. \tag{4.40}$$

例 8　在 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $(R+r)^2 \geqslant \sqrt{3}\, s$.

(2) $(abc)^2 \geqslant \left(\frac{4s}{\sqrt{3}}\right)^3$.

(3) $R \geqslant \frac{\sqrt{3}\, abc}{a^2+b^2+c^2}$.

(4) $9rR \geqslant 2\sqrt{3}\, s$.

证明 (1) 从例 1，我们知道 $R \geqslant \frac{2p}{3\sqrt{3}}$. 于是,

$$R+r \geqslant \frac{1}{3}\left[\frac{p}{\sqrt{3}}+\frac{p}{\sqrt{3}}+3r\right] \geqslant \sqrt[3]{p^2 r} = \sqrt[3]{ps}. \qquad (4.41)$$

众所周知

$$\begin{aligned} s^2 &= p(p-a)(p-b)(p-c) \\ &\leqslant p\left\{\frac{1}{3}[(p-a)+(p-b)+(p-c)]\right\}^3 \\ &= \frac{p^4}{27}. \end{aligned} \qquad (4.42)$$

于是,我们有

$$p^2 \geqslant 3\sqrt{3}\, s.$$

从(4.41)和(4.42),可以得到

$$(R+r)^2 \geqslant \sqrt[3]{p^2 s^2} \geqslant \sqrt[3]{3\sqrt{3}\, s^3} = \sqrt{3}\, s. \qquad (4.43)$$

(2) 读者知道,

$$abc = 4Rs \text{(利用例 2 中(4.12)的前一个等式)}. \qquad (4.44)$$

顺便说一下,希望读者能牢记例 2 及其证明.

那么,

$$\begin{aligned} \frac{4s}{\sqrt{3}} &= \frac{abc}{\sqrt{3}\, R} \leqslant \frac{3abc}{a+b+c} \text{(利用例 1)} \\ &\leqslant \frac{3abc}{3\sqrt[3]{abc}} \text{(利用 } A_3 \geqslant G_3\text{)} \\ &= (abc)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \qquad (4.45)$$

两边立方，得

$$(abc)^2 \geqslant \left(\frac{4s}{\sqrt{3}}\right)^3. \quad (4.46)$$

(3) 从例 2，我们有

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\, s. \quad (4.47)$$

于是，

$$R(a^2+b^2+c^2) \geqslant 4\sqrt{3}\, Rs = \sqrt{3}\, abc (\text{利用 } (4.44)). \quad (4.48)$$

这就是(3)所要证明的.

(4) $9rRp = 9Rs \geqslant \sqrt{3}\, s(3\sqrt{3}\, R) \geqslant 2\sqrt{3}\, sp.$ (4.49)

上式两边同乘以 $\frac{1}{p}$，有

$$9rR \geqslant 2\sqrt{3}\, s. \quad (4.50)$$

例 8 中 4 个不等式虽然简单，但很有趣，所以介绍给读者.

例 9 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{1}{2rR} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \leqslant \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{4r^2}.$$

证明 由于 $abc = 4Rs$，那么，

$$\frac{1}{2rR} = \frac{2p}{abc} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}$$

$$\leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \quad (\text{从例 5 的}(4.21),$$

可以知道

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac} \leqslant \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

不等式两边同加上 $2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)$，就得上述不等式. ）

$$\leqslant \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} (\text{利用第一节不等式}(1.66)). \quad (4.51)$$

现在证明最后一个不等式. 利用 $G_2 \leqslant A_2$, 我们有

$$(p-a)(p-b) \leqslant \left[\frac{(p-a)+(p-b)}{2}\right]^2 = \frac{c^2}{4}.$$

那么. (4.52)

$$\frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{4(p-a)(p-b)}. \qquad (4.53)$$

同理, 我们有

$$\frac{1}{a^2} \leqslant \frac{1}{4(p-b)(p-c)}, \quad \frac{1}{b^2} \leqslant \frac{1}{4(p-a)(p-c)}. \qquad (4.54)$$

上述三个不等式相加, 有

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-a)(p-c)} + \frac{1}{(p-a)(p-b)}\right]$$

$$= \frac{1}{4(p-a)(p-b)(p-c)}[(p-a)+(p-b)+(p-c)]$$

$$= \frac{p}{4(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{p^2}{4s^2} = \frac{1}{4r^2} \quad (\text{利用 } s=rp). \qquad (4.55)$$

例 10 在 $\triangle ABC$ 中, O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 求证:

$$(a+b)OC+(b+c)OA + (a+c)OB \geqslant 8s.$$

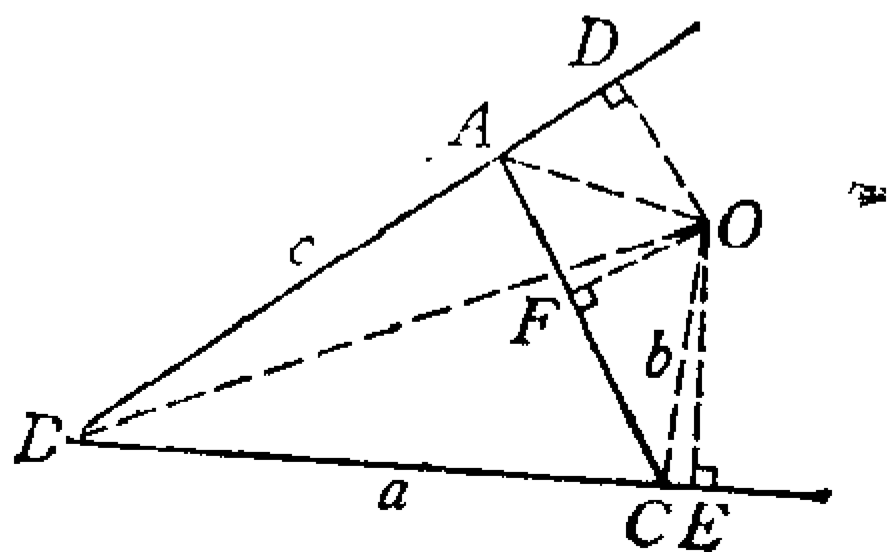


图 4

证明 作 $OD \perp AB$, $OE \perp BC$, $OF \perp AC$, 垂足分别为 D、E、F(图 4).

$$OA=\sqrt{OD^2+DA^2},$$
$$OB=\sqrt{OD^2+DB^2}. \quad (4.56)$$

利用第一节不等式(1.12)，我们有

$$OA+OB\geqslant\sqrt{(2OD)^2+(DA+DB)^2}. \quad (4.57)$$

上式两边同乘以 AB 的长度，有

$$c(OA+OB)\geqslant\sqrt{(2c\cdot OD)^2+c^2(DA+DB)^2}. \quad (4.58)$$

由于

$$c\cdot OD=2s_{\triangle OAB}. \quad (4.59)$$

这里 $s_{\triangle OAB}$ 表示 $\triangle OAB$ 的面积.

显然，

$$DA+DB\geqslant c. \quad (4.60)$$

将(4.59)和(4.60)代入(4.58)，我们有

$$c(OA+OB)\geqslant\sqrt{(4s_{\triangle OAB})^2+c^4}. \quad (4.61)$$

同理，有

$$a(OB+OC)\geqslant\sqrt{(4s_{\triangle OBC})^2+a^4}, \quad (4.62)$$
$$b(OA+OC)\geqslant\sqrt{(4s_{\triangle OAC})^2+b^4}. \quad (4.63)$$

上述三个不等式相加，有

$$(a+b)OC+(b+c)OA+(a+c)OB$$
$$\geqslant\sqrt{(4s_{\triangle OAB})^2+c^4}+\sqrt{(4s_{\triangle OBC})^2+a^4}$$
$$+\sqrt{(4s_{\triangle OAC})^2+b^4}$$
$$\geqslant\sqrt{16(s_{\triangle OAB}+s_{\triangle OBC}+s_{\triangle OAC})^2+(a^2+b^2+c^2)^2}$$

(利用第二节不等式(2.94))

$\geqslant\sqrt{16s^2+(4\sqrt{3}s)^2}$(利用 $s_{\triangle OAB}+s_{\triangle OBC}+s_{\triangle OAC}\geqslant s$，和 $a^2+b^2+c^2\geqslant4\sqrt{3}s$) $=8s$. (4.64)

例 11 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $abcABC\geqslant\left(\frac{2\pi}{3}\right)^3 rs$.

(2) $(\pi-A)(\pi-B)(\pi-C)abc\geqslant\left(\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}\right)^3 sp.$

证明 (1) 首先，我们要建立一个有关 r，R 的恒等式.
一方面，

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)r=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \tag{4.65}$$

另一方面，我们知道 $s=2R^2\sin A\sin B\sin C$. 于是，有

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \tag{4.66}$$

(4.66)下面要应用.

$$abcABC=4RsABC\text{(利用(4.44))}$$

$$=sr\frac{A}{\sin\frac{A}{2}}\frac{B}{\sin\frac{B}{2}}\frac{C}{\sin\frac{C}{2}}\text{(利用(4.66))}$$

$$=8sr\frac{\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\frac{\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\frac{\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\geqslant 8sr\left[\frac{\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\right]^3\text{(利用第一节(1.78))}$$

$$=\left(\frac{2\pi}{3}\right)^3 rs. \tag{4.67}$$

(2) $(\pi-A)(\pi-B)(\pi-C)abc$

$$=4Rs(\pi-A)(\pi-B)(\pi-C)$$

$$=4sp(\pi-A)(\pi-B)(\pi-C)\frac{R}{p}$$

$$=4sp(\pi-A)(\pi-B)(\pi-C)\frac{1}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=sp\frac{(\pi-A)(\pi-B)(\pi-C)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=8sp\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}$$

$$\geqslant 8sp\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)^3 \text{（利用第一节(1.73)）}$$

$$=\left(\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}\right)^3 sp. \tag{4.68}$$

例 12 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $9r\leqslant h_a+h_b+h_c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$；

(2) $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\geqslant\frac{2}{R}$.

证明 (1) 显然，我们有

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&\geqslant 3(ab+bc+ca)\\&=3abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\&=\frac{3abc}{2s}(h_a+h_b+h_c)\\&=6R(h_a+h_b+h_c).\ \text{（利用 } abc=4Rs\text{）}\end{aligned} \tag{4.69}$$

从例 1，我们知道

$$a+b+c\leqslant 3\sqrt{3}R.$$

那么，

$$h_a+h_b+h_c\leqslant\frac{1}{6R}(a+b+c)^2$$
$$\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c). \tag{4.70}$$

另外，我们有

$$\frac{1}{r}(h_a+h_b+h_c)=\frac{2s}{r}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\geqslant 9 \quad (\text{利用第一节}(1.64)). \tag{4.71}$$

于是，

$$h_a+h_b+h_c\geqslant 9r. \tag{4.72}$$

(2) $$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{2s}(a+b+c)=\frac{1}{r}$$
$$\geqslant\frac{2}{R} \quad (\text{利用例 1 的 } R\geqslant 2r). \tag{4.73}$$

例 13 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$2\sqrt{3r(r+4R)}\leqslant a+b+c\leqslant\sqrt{4(r+2R)^2+2R^2}.$$

证明 由于 $s=pr$，$4R=\dfrac{abc}{s}$，那么，我们有

$$r(r+4R)=r^2+4Rr=\frac{s^2}{p^2}+\frac{abc}{p}$$
$$=\frac{1}{p}[(p-a)(p-b)(p-c)+abc]$$
$$=\frac{1}{p}[p^3-p^2(a+b+c)+p(ab+bc+ca)]$$
$$=ab+bc+ca-p^2$$
$$\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2-p^2=\frac{1}{3}p^2. \tag{4.74}$$

两端开方，并且两端乘以$2\sqrt{3}$，有

$$2\sqrt{3r(r+4R)}\leqslant a+b+c. \tag{4.75}$$

利用第三节(3.9)和(3.10)，读者容易明白，在$\triangle ABC$中，

$$a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)\leqslant 9R^2. \tag{4.76}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}4(r+2R)^2+2R^2-18R^2+4r(r+4R)&\\=18R^2+4(ab+bc+ca-p^2)&\\(\text{利用}(4.74))&\\\geqslant 2(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca-p^2)&\\=2(a+b+c)^2-4p^2&\\=4p^2.&\end{aligned} \tag{4.77}$$

上式两端开方，有

$$a+b+c\leqslant\sqrt{4(r+2R)^2+2R^2}. \tag{4.78}$$

关于$\triangle ABC$的内角平分线t_a, t_b, t_c，我们有下述几个基本的不等式.

例 14 在$\triangle ABC$中，求证：

(1) $\frac{27}{2}r^2R\leqslant t_at_bt_c\leqslant ps\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}abc\leqslant\frac{27}{8}R^3$;

(2) $9r\leqslant t_a+t_b+t_c\leqslant\sqrt{3}\sqrt{t_a^2+t_b^2+t_c^2}\leqslant\sqrt{3}p$;

(3) $(t_a+t_b+t_c)^2\leqslant\frac{9}{4}(ab+bc+ca)$;

(4) $\frac{t_at_b(p-c)}{t_c}+\frac{t_bt_c(p-a)}{t_a}+\frac{t_ct_a(p-b)}{t_b}\leqslant 3s$;

(5) $t_a^2t_b^2+t_b^2t_c^2+t_c^2t_a^2\leqslant rp^2(4R+r)$.

在证明例14之前，我们先推导$\triangle ABC$的内角平分线的一组基本公式. 它是解决问题的一个关键.

在 $\triangle ABC$ 中, AD 是角 A 的内角平分线(图 5).

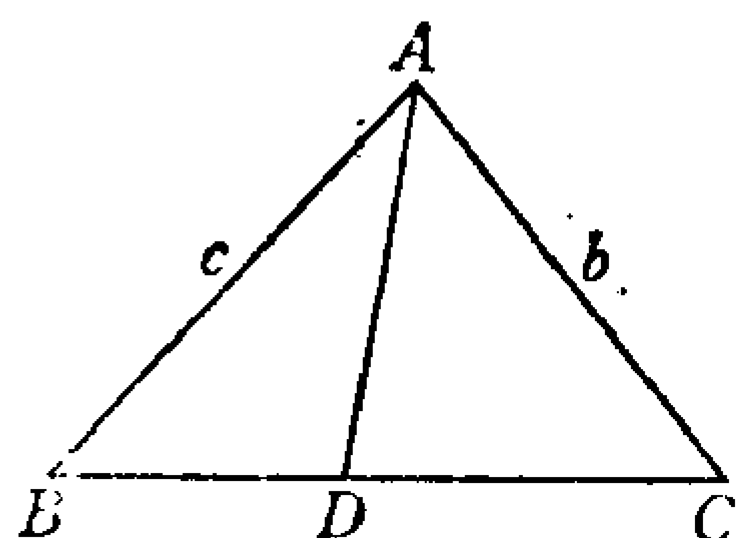


图　5

读者都知道:

$$\frac{b}{c}=\frac{CD}{BD}, \tag{4.79}$$

那么,

$$\frac{b+c}{c}=\frac{CD+BD}{BD}=\frac{a}{BD}.$$

换句话说,

$$BD=\frac{ac}{b+c}. \tag{4.80}$$

此外, 由余弦定理, 我们有

$$\cos A=\frac{1}{2bc}(b^2+c^2-a^2).$$

于是,

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2}&=\frac{1}{2}(1-\cos A)=\frac{1}{4bc}(2bc-b^2-c^2+a^2)\\&=\frac{1}{4bc}[a^2-(b-c)^2]=\frac{1}{bc}(p-b)(p-c).\end{aligned} \tag{4.81}$$

完全类似, 我们有

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A)=\frac{p}{bc}(p-a). \tag{4.82}$$

同理, 我们知道

$$\sin^2\frac{B}{2}=\frac{1}{ac}(p-a)(p-c). \tag{4.83}$$

$$\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{ab}(p-a)(p-b). \tag{4.84}$$

$$\cos^2\frac{B}{2}=\frac{p}{ac}(p-b). \tag{4.85}$$

$$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{p}{ab}(p-c). \tag{4.86}$$

这些公式,希望读者能记住.

现在我们可以建立三角形的内角平分线公式了.

在 $\triangle ABD$ 中. 利用正弦定理,我们有

$$\frac{t_a}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}. \tag{4.87}$$

因而,

$$t_a=\frac{BD\sin B}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{ac}{b+c}\frac{\sin B}{\sqrt{\frac{1}{bc}(p-b)(p-c)}}$$

(利用(4.80)和(4.81))

$$=\frac{2s\sqrt{bc}}{(b+c)\sqrt{(p-b)(p-c)}}=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$$

$$=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}. \tag{4.88}$$

同理,我们有

$$t_b=\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)}=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}. \tag{4.89}$$

$$t_c=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}. \tag{4.90}$$

(4.88)、(4.89)和(4.90)是解决例 14 的一把钥匙,对于这三个公式,实质上只要记住其中一个就可以了.

例 14 的证明 (1) 利用(4.88)、(4.89)和(4.90),我们得到

$$t_at_bt_c=\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}ps$$

$$\leqslant \frac{8abc}{2\sqrt{ab}2\sqrt{bc}2\sqrt{ca}} ps \quad (\text{利用 } a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \text{ 等.})$$

$$= ps$$

$$= p\frac{abc}{4R} \quad (\text{又一次利用 } abc = 4Rs)$$

$$\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} R \frac{abc}{4R} \quad \left(\text{利用例 1, 有 } p \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} R\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} abc = 3\sqrt{3} R^3 \sin A \sin B \sin C$$

$$\leqslant 3\sqrt{3} R^3 \frac{3}{8}\sqrt{3} (\text{利用第三节不等式}(3.2))$$

$$= \frac{27}{8} R^3. \tag{4.91}$$

另一方面，我们有

$$t_a t_b t_c \geqslant \frac{27abc}{(a+b+c)^3} ps \quad \left(\text{利用}(4.91)\text{的第一个等式和本节例 3 的不等式 } \frac{8}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant \frac{27}{(a+b+c)^3}\right)$$

$$= \frac{27}{2} \frac{Rs^2}{p^2} (\text{利用 } abc = 4Rs, \text{ 和 } a+b+c = 2p)$$

$$= \frac{27}{2} r^2 R. \tag{4.92}$$

(2) 显然，我们有

$$t_a + t_b + t_c \geqslant 3\sqrt[3]{t_a t_b t_c} (\text{利用 } \mathrm{A}_3 \geqslant \mathrm{G}_3)$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{27}{2} r^2 R} \quad (\text{利用}(4.92))$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{27}{2} r^2 2r} \quad (\text{利用 } R \geqslant 2r)$$

$$= 9r. \tag{4.93}$$

利用第一节不等式(1.66)，我们有

$$(t_a+t_b+t_c)^2\leqslant 3(t_a^2+t_b^2+t_c^2). \tag{4.94}$$

两端开方，有

$$t_a+t_b+t_c\leqslant\sqrt{3}\sqrt{t_a^2+t_b^2+t_c^2}. \tag{4.95}$$

现在我们证明 $t_a^2+t_b^2+t_c^2\leqslant p^2$. 利用(4.88)、(4.89)和(4.90).

$$\begin{aligned}
&t_a^2+t_b^2+t_c^2\\
&=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)+\frac{4ac}{(a+c)^2}p(p-b)\\
&\quad+\frac{4ab}{(a+b)^2}p(p-c)\\
&\leqslant p[(p-a)+(p-b)+(p-c)] \quad (\text{利用 } 4bc\leqslant(b+c)^2 \text{ 等})\\
&=p^2.
\end{aligned} \tag{4.96}$$

(3) 由于 $2\sqrt{bc}\leqslant b+c$, 从(4.88)，有

$$t_a\leqslant\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}. \tag{4.97}$$

同理，有

$$t_b\leqslant\sqrt{ac}\cos\frac{B}{2},\ t_c\leqslant\sqrt{ab}\cos\frac{C}{2}. \tag{4.98}$$

再利用 Cauchy 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
(t_a+t_b+t_c)^2&\leqslant\left(\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}+\sqrt{ac}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{ab}\cos\frac{C}{2}\right)^2\\
&\leqslant(bc+ac+ab)\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right).
\end{aligned} \tag{4.99}$$

利用第三节不等式(3.7)，我们可以看到

$$\begin{aligned}
&\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\\
&=\frac{1}{2}(1-\cos A)+\frac{1}{2}(1-\cos B)+\frac{1}{2}(1-\cos C)
\end{aligned}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)\geqslant\frac{3}{4}. \tag{4.100}$$

那么,

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$$
$$=3-\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\leqslant\frac{9}{4}. \tag{4.101}$$

将(4.101)代入(4.99). 我们有

$$(t_a+t_b+t_c)^2\leqslant\frac{9}{4}(ab+bc+ca). \tag{4.102}$$

(4) 同样地,从(4.88)、(4.89)和(4.90),我们有

$$\frac{t_at_b(p-c)}{t_c}=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)}(p-c)$$
$$\cdot\frac{a+b}{2\sqrt{ab}\sqrt{p(p-c)}}$$
$$=\frac{2c(a+b)s}{(b+c)(a+c)}. \tag{4.103}$$

同理,可以得到

$$\frac{t_bt_c(p-a)}{t_a}=\frac{2a(b+c)s}{(a+b)(a+c)}. \tag{4.104}$$

$$\frac{t_ct_a(p-b)}{t_b}=\frac{2b(a+c)s}{(a+b)(b+c)}. \tag{4.105}$$

利用(4.103)、(4.104)和(4.105),立刻有

$$\frac{t_at_b(p-c)}{t_c}+\frac{t_bt_c(p-a)}{t_a}+\frac{t_ct_a(p-b)}{t_b}$$
$$=\frac{2s}{(a+b)(b+c)(c+a)}[a(b+c)^2+b(a+c)^2$$
$$+c(a+b)^2]. \tag{4.106}$$

而

$$3(a+b)(b+c)(c+a)-2[a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2]$$
$$=3[a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)+2abc]$$

$$-2[a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)+6abc]$$
$$=a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2\geqslant 0. \tag{4.107}$$

利用(4.107)，我们可以得到所要证明的不等式.

(5) 从(4.88)，我们容易看到

$$t_a\leqslant\sqrt{p(p-a)}\quad(利用\ 2\sqrt{bc}\leqslant b+c). \tag{4.108}$$

同时，从(4.89)和(4.90)，有

$$t_b\leqslant\sqrt{p(p-b)},\quad t_c\leqslant\sqrt{p(p-c)}. \tag{4.109}$$

那么，利用这些不等式，有

$$\begin{aligned}&t_a^2t_b^2+t_b^2t_c^2+t_c^2t_a^2\\&\leqslant p^2[(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)]\\&=p^2[3p^2-2p(a+b+c)+(ab+bc+ca)]\\&=p^2[(ab+bc+ca)-p^2]\\&=p^2r(r+4R)\quad(利用(4.74)).\end{aligned} \tag{4.110}$$

例 15 设 P 为 $\triangle ABC$ 内部一点，记 $PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，求证：$x^n+y^n+z^n\leqslant a^n+b^n+c^n$（$n$ 是自然数）.

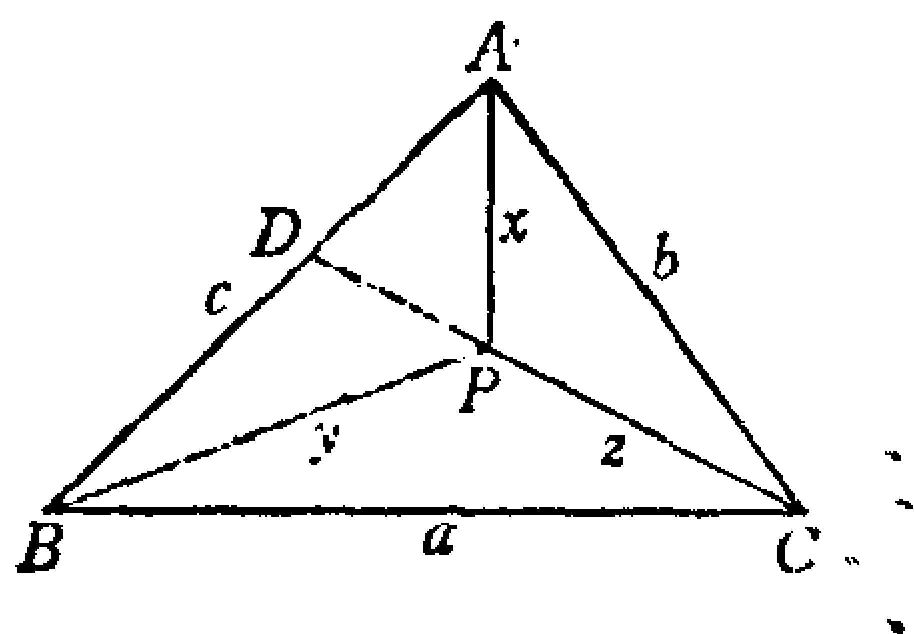


图 6

证明 如图 6，延长 CP 交 AB 于 D. 显然，

$$b+AD\geqslant CD=z+PD.$$
$$PD+BD\geqslant y.$$

上面两式相加，有

$$b+c\geqslant y+z. \tag{4.111}$$

同理，有

$$a+b\geqslant x+y,\ a+c\geqslant x+z. \tag{4.112}$$

(4.111)和(4.112)相加，可以得到

$$a+b+c\geqslant x+y+z. \tag{4.113}$$

我们不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$, $\angle BPC>\angle A>\angle B>\angle PBC$. 那么, $a>z$, 同理, $\angle APC>\angle B>\angle C>\angle PCA$, 则 $b>x$. 又从

$$\angle BPC>\angle A>\angle C>\angle PCB,$$

则 $a>y$. 于是 a 一定比 x、y、z 之中任一个大.

不妨再设 $x\geqslant y\geqslant z$, 其他情况完全类似证明.

$$(x^{n-1}-y^{n-1})x\leqslant(x^{n-1}-y^{n-1})a.$$

$$(y^{n-1}-z^{n-1})(x+y)\leqslant(y^{n-1}-z^{n-1})(a+b).$$

$$z^{n-1}(x+y+z)\leqslant z^{n-1}(a+b+c). \tag{4.114}$$

上面三个不等式相加, 利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}x^n+y^n+z^n&\leqslant ax^{n-1}+by^{n-1}+cz^{n-1}\\&\leqslant(x^n+y^n+z^n)^{\frac{n-1}{n}}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned} \tag{4.115}$$

于是, 上式两端 n 次方, 可以得到

$$x^n+y^n+z^n\leqslant a^n+b^n+c^n. \tag{4.116}$$

在几何不等式的内容中, 有一类是求最大值与最小值的问题. 请看下例:

例 16 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 求点 P, 使得 $BL^2+CM^2+AN^2$ 达到最小, 这里 L、M、N 分别是 P 到 BC、CA、AB 的垂足.

在解决这类问题的时候, 我们需要考虑不等式取等号的条件. 读者肯定知道, 凡是由第一节定理(Jensen 不等式)直接推导出来的不等式, 等号成立的条件是显然的, 不言自明的. 而由第二节定理(加权的 Jensen 不等式)推导出来的, 我们就要加以分析了, 凡是在加权的不等式中, 如果 p_1、p_2, $\cdots$, p_n 全是有理数, 这加权的 Jensen 不等式是第一节 Jensen 不等式的一个简单推论, 所以当 p_1, p_2, $\cdots$, p_n 全是有理数时, 加权的 Jensen 不等式取等号, 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

这里的字母的意义见第二节定理(加权的 Jensen 不等式).

而当 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 中有无理数时，由于我们应用了取极限这一步骤，则从我们的证明中，不能从加权的 Jensen 不等式取等号而推出 $x_1=x_2=\cdots=x_n$. 因为取极限后，两个不等式变为等式，不能推出原来的不等式是等式. 例如

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=3=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right),$$

你能讲 $3+\frac{1}{n}$ 等于 $3-\frac{1}{n}$ 吗？当然，在这里，我只是讲，用第二节的证明方法不能推出相应的结论.

用这个原则来判断，我们可以得出，到目前为止的大多数不等式取等号的条件.

例如 Cauchy 不等式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.117)$$

它是由 Hölder 不等式中，令 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ 推导出来的（见第二节例 16），这相当于加权的 Jensen 不等式中 P_1, P_2 全是 $\frac{1}{2}$ 的情况，那么等号成立当且仅当

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}>0.$$

现在我们可以来解决例 16 了.

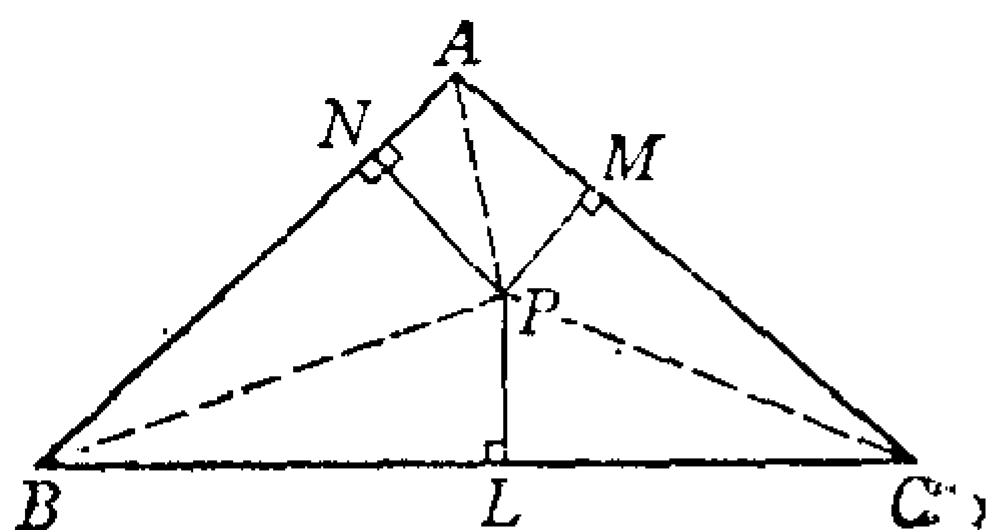


图 7

例 16 的解 如图 7，设 $BL=x$, $CM=y$, $AN=z$. 那么

$$CL=a-x,\ AM=b-y,\ BN=c-z.$$

有趣的是

$$
\begin{aligned}
&(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\\
&=(CP^2-PL^2)+(AP^2-PM^2)+(BP^2-PN^2)\\
&=(CP^2-PM^2)+(AP^2-PN^2)+(BP^2-PL^2)\\
&=y^2+z^2+x^2. \qquad (4.118)
\end{aligned}
$$

展开上式，有

$$2(ax+by+cz)=a^2+b^2+c^2. \qquad (4.119)$$

利用 Cauchy 不等式，有

$$(ax+by+cz)^2\leqslant(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2). \qquad (4.120)$$

利用(4.119)，有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2). \qquad (4.121)$$

所以，$BL^2+CM^2+AN^2=x^2+y^2+z^2$ 的最小值是 $\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$. 等号成立当且仅当

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\lambda>0.$$

代入(4.119)后，有

$$2\lambda(a^2+b^2+c^2)=a^2+b^2+c^2. \qquad (4.122)$$

那么，$\lambda=\frac{1}{2}$. 这时 P 为锐角 $\triangle ABC$ 的外心.

对于平面几何中的不等式，复平面的一些基本知识是有用的，请看下例.作为本节的一个小插曲.

例 17 A^*, B^*, C^* 各自是 $\triangle ABC$ 的边 a, b, c 上的点，a^*, b^*, c^* 分别表示 $\triangle A^*B^*C^*$ 的边 B^*C^*, A^*C^*, A^*B^*. 求证：$a^2b^*c^*+b^2c^*a^*+c^2a^*b^*\geqslant 4s^2$.（这里 s 是 $\triangle ABC$ 的面积）.

首先，我们要证明一个引理.

引理 P 是 $\triangle ABC$ 内一点(图 8),求证:

$$\frac{PA}{a}\,\frac{PB}{b}+\frac{PB}{b}\,\frac{PC}{c}+\frac{PC}{c}\,\frac{PA}{a}\geqslant 1.$$

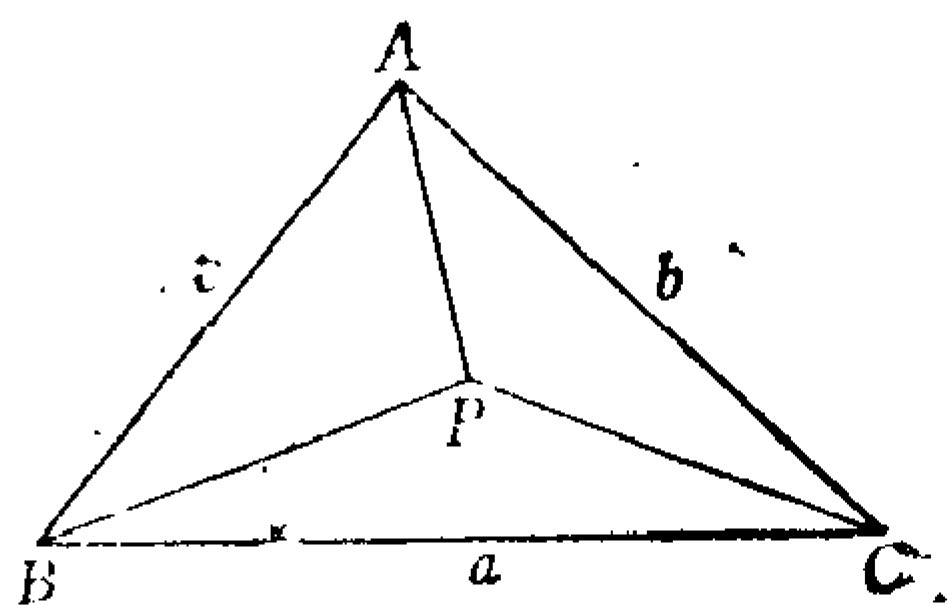


图 8

证明 取 $\triangle ABC$ 所在平面为复平面(高斯(Gauss)平面),P 为原点. A、B、C 三点所对应的复数分别记为 α, β, γ.

显然地,

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)=\alpha\beta(\alpha-\beta)+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha\gamma(\alpha-\gamma). \qquad (4.123)$$

那么,我们有

$$\frac{\beta}{(\alpha-\gamma)}\,\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)}+\frac{\gamma}{(\beta-\alpha)}\,\frac{\alpha}{(\beta-\gamma)}+\frac{\alpha}{(\gamma-\beta)}\,\frac{\beta}{(\gamma-\alpha)}$$
$$=\frac{1}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}[\beta\gamma(\beta-\gamma)-\gamma\alpha(\alpha-\gamma)+\alpha\beta(\alpha-\beta)]$$
$$=1. \qquad (4.124)$$

对等式两边取复数的模,我们有

$$\left|\frac{\beta}{\alpha-\gamma}\right|\left|\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right|+\left|\frac{\gamma}{\beta-\alpha}\right|\left|\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right|+\left|\frac{\alpha}{\gamma-\beta}\right|\left|\frac{\beta}{\gamma-\alpha}\right|$$
$$\geqslant\left|\frac{\beta\gamma}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}+\frac{\gamma\alpha}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\alpha\beta}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}\right|$$

$$=1. \tag{4.125}$$

我们知道

$$\left|\frac{\beta}{\alpha-\gamma}\right|=\left|\frac{\beta}{\gamma-\alpha}\right|=\frac{|\beta|}{|\gamma-\alpha|}=\frac{PB}{b} \tag{4.126}$$

类似地,

$$\left|\frac{\gamma}{\beta-\alpha}\right|=\left|\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right|=\frac{PC}{c}.$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right|=\left|\frac{\alpha}{\gamma-\beta}\right|=\frac{PA}{a}. \tag{4.127}$$

将(4.126)和(4.127)代入(4.125),我们有

$$\frac{PB}{b}\frac{PC}{c}+\frac{PC}{c}\frac{PA}{a}+\frac{PA}{a}\frac{PB}{b}\geqslant 1. \tag{4.128}$$

这就是引理.

从(4.128),显然有

$$aPB\cdot PC+bPC\cdot PA+cPA\cdot PB\geqslant abc. \tag{4.129}$$

例 17 的证明 设 $\triangle AB^*C^*$ 与 $\triangle CA^*B^*$ 的两个外接圆交于 B^* 和 P 两点(图 9).

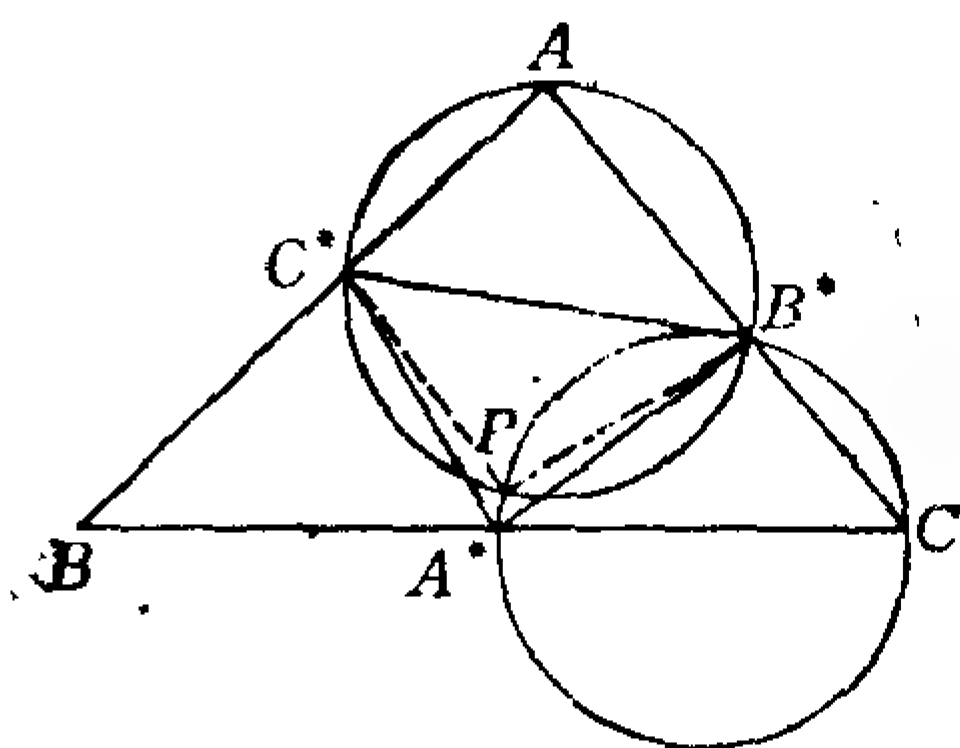


图 9

明显地,

$$\angle A+\angle C^*PB^*=\pi,$$
$$\angle C+\angle A^*PB^*=\pi. \tag{4.130}$$

利用上面两式,我们有

$$\angle C^*PA^*=2\pi-\angle C^*PB^*-\angle A^*PB^*=\angle A+\angle C. \tag{4.131}$$

所以 B, A^*, P, C^* 四点共圆,这表明 $\triangle AB^*C^*$、$\triangle CA^*B^*$ 与 $\triangle BC^*A^*$ 三个外接圆交于一点 P.

$\triangle AB^*C^*$ 的外接圆半径记为 R_1, $\triangle BC^*A^*$ 的外接圆半

径记为 R_2，$\triangle CA^*B^*$ 的外接圆半径记为 R_3，$\triangle ABC$ 的外接圆半径仍用 R 表示.

由四个三角形的正弦定理，有

$$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C.$$

$$a^*=2R_1\sin A,\ b^*=2R_2\sin B,\ c^*=2R_3\sin C. \tag{4.132}$$

利用(4.132)，我们有

$$\begin{aligned}&a^2b^*c^*+b^2c^*a^*+c^2a^*b^*\\&=8R\sin A\sin B\sin C(aR_2R_3+bR_1R_3+cR_1R_2)\\&=\frac{4s}{R}(aR_2R_3+bR_1R_3+cR_1R_2).\end{aligned} \tag{4.133}$$

利用圆内直径大于弦这一事实. 我们有

$$2R_1\geqslant PA,\ 2R_2\geqslant PB,\ 2R_3\geqslant PC. \tag{4.134}$$

于是，将(4.134)代入(4.133)，我们有

$$\begin{aligned}&a^2b^*c^*+b^2c^*a^*+c^2a^*b^*\\&\geqslant\frac{s}{R}(aPB\cdot PC+bPA\cdot PC+cPA\cdot PB)\\&\geqslant\frac{s}{R}abc\quad(\text{利用}(4.129))\\&=4s^2.\end{aligned} \tag{4.135}$$

下面将讨论有关三角形中线的不等式.

在 $\triangle ABC$ 中，分别延长三条中线 m_a，m_b，m_c，交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D^*，E^*，F^*，记 $AD^*=M_a$，$BE^*=M_b$，$CF^*=M_c$(图 10)

例 18 在 $\triangle ABC$ 中，求证:

(1) $M_a+M_b+M_c\geqslant\frac{4}{3}(m_a+m_b+m_c)$.

(2) $M_a+M_b+M_c\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}(a+b+c)$.

证明 我们知道，

$$4m_a^2=2(b^2+c^2)-a^2,$$
$$4m_b^2=2(a^2+c^2)-b^2,$$
$$4m_c^2=2(a^2+b^2)-c^2. \tag{4.136}$$

那么

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2). \tag{4.137}$$

读者一定知道

$$AD\cdot DD^*=BD\cdot DC,$$

从而，有

$$m_a(M_a-m_a)=\frac{1}{4}a^2. \tag{4.138}$$

图 10

记 $k=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，利用(4.136)和(4.138)，我们有

$$\begin{aligned}
m_aM_a&=m_a^2+\frac{1}{4}a^2\\
&=\frac{1}{3}m_a^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{2}{3}m_a^2\\
&=\frac{1}{12}[2(b^2+c^2)-a^2]+\frac{1}{4}a^2+\frac{2}{3}m_a^2\\
&=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\frac{2}{3}m_a^2\\
&=\frac{2}{3}(k^2+m_a^2).
\end{aligned} \tag{4.139}$$

所以，

$$M_a=\frac{2}{3}k\left(\frac{k}{m_a}+\frac{m_a}{k}\right)\geqslant\frac{4}{3}k. \tag{4.140}$$

同理，我们可以看到

$$M_b\geqslant\frac{4}{3}k,\qquad M_c\geqslant\frac{4}{3}k. \tag{4.141}$$

从(4.140)和(4.141)，立刻有

$$\begin{aligned}
M_a+M_b+M_c &\geqslant 4k \\
&= 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2} \quad (\text{利用}(4.137)) \\
&\geqslant \frac{4}{3}(m_a+m_b+m_c) \quad (\text{利用 Cauchy 不等式}).
\end{aligned} \tag{4.142}$$

(2) 同样由 Cauchy 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
M_a+M_b+M_c &\geqslant 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\
&\geqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}(a+b+c).
\end{aligned} \tag{4.143}$$

关于一个三角形的高、中线、内角平分线的互相比较，有下述有趣的不等式.

例 19 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $\dfrac{m_a}{t_a} \geqslant \dfrac{(b+c)^2}{4bc}$；

(2) $\dfrac{m_a}{h_a} \geqslant \dfrac{b^2+c^2}{2bc}$；

(3) $h_a+m_b+t_c \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$.

证明 (1) 从(4.88)和(4.136)，我们有

$$\frac{m_a}{t_a} = \frac{(b+c)\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2\sqrt{bc}\sqrt{(b+c)^2-a^2}}. \tag{4.144}$$

显然，

$$(b+c)^2-a^2 < (b+c)^2-(b-c)^2 = 4bc. \tag{4.145}$$

因此，

$$\frac{(b-c)^2}{4bc} \leqslant \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}. \tag{4.146}$$

两边加上1，有

$$\frac{(b+c)^2}{4bc}\leqslant\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{(b+c)^2-a^2}. \tag{4.147}$$

两端开方，有

$$\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}\leqslant\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{\sqrt{(b+c)^2-a^2}}. \tag{4.148}$$

将(4.148)代入(4.144)，有

$$\frac{m_a}{t_a}\geqslant\frac{(b+c)^2}{4bc}. \tag{4.149}$$

从(4.149)，读者一定会写出另外两个不等式

$$\frac{m_b}{t_b}\geqslant\frac{(a+c)^2}{4ac},\quad \frac{m_c}{t_c}\geqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}. \tag{4.150}$$

(2) 利用 $2s=ah_a$，和公式(4.32)，我们有

$$\frac{2bcm_a}{(b^2+c^2)h_a}=\frac{2abc\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{4s(b^2+c^2)}$$

$$=\frac{2abc\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{(b^2+c^2)\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}}. \tag{4.151}$$

如果我们能够证明

$$4a^2b^2c^2[2(b^2+c^2)-a^2]-(b^2+c^2)^2[2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)]\geqslant 0, \tag{4.152}$$

则移项后，两端开方，并且结合(4.151)，有

$$\frac{2bcm_a}{(b^2+c^2)h_a}\geqslant 1, \tag{4.153}$$

这就是要证明的．通过直接计算，我们可以看到

$$4a^2b^2c^2[2(b^2+c^2)-a^2]-(b^2+c^2)^2[2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)]$$
$$=(b^2+c^2)\{(b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)+8a^2b^2c^2$$

$$-2(b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)]-4a^4b^2c^2$$
$$=(b^2+c^2)[a^4(b^2+c^2)+(b^2+c^2)(b^2-c^2)^2-2a^2(b^2-c^2)^2]-4a^4b^2c^2$$
$$=a^4(b^2-c^2)^2-2a^2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2(b^2-c^2)^2$$
$$=(b^2-c^2)^2(a^2-b^2-c^2)^2\geqslant 0. \tag{4.154}$$

这恰是我们所需要的.

同理,我们还有

$$\frac{m_b}{h_b}\geqslant\frac{a^2+c^2}{2ac},\quad \frac{m_c}{h_c}\geqslant\frac{a^2+b^2}{2ab}. \tag{4.155}$$

(3) 分两种情况讨论:

① 当 $a+b\leqslant 2c$ 时,令

$$a=u+x,\ b=u-x. \tag{4.156}$$

则

$$ab=u^2-x^2,\ a+b=2u. \tag{4.157}$$

显然 $u>0$, 和 $|x|<u\leqslant c$, 又由于 $a+b>c$, 有 $u>\frac{c}{2}$.

利用(4.90),我们知道

$$\begin{aligned}
t_c^2&=\frac{4ab}{(a+b)^2}p(p-c)\\
&=\frac{ab}{(a+b)^2}(a+b+c)(a+b-c)\\
&=ab\left[1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right]\\
&=(u^2-x^2)\left(1-\frac{c^2}{4u^2}\right)\text{(利用(4.157))}\\
&=u^2-\frac{c^2}{4}+\left(\frac{c^2}{4u^2}-1\right)x^2\\
&\leqslant u^2-\frac{c^2}{4}\quad\text{(利用 }2u>c\text{)},
\end{aligned} \tag{4.158}$$

$$2m_a=\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\sqrt{2(u-x)^2+2c^2-(u+x)^2}$$
$$=\sqrt{(3u-x)^2-2(4u^2-c^2)}. \qquad (4.159)$$
$$2m_b=\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$$
$$=\sqrt{(3u+x)^2-2(4u^2-c^2)}. \qquad (4.160)$$

从第一节，我们知道 $f(x)=\sqrt{x^2+h^2}$（h 是一个正常数）是一个凸函数. 现在我们来证明

$$f(x)=-\sqrt{x^2-h^2} \quad (x>h) \qquad (4.161)$$

也是一个凸函数. 当 $x_1>h$ 和 $x_2>h$ 时，

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{x_1^2-h^2}+\sqrt{x_2^2-h^2}\right)^2-\left[\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2-h^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(x_1^2-h^2)(x_2^2-h^2)}-(x_1x_2-h^2)\right], \qquad (4.162)$$

而

$$(x_1^2-h^2)(x_2^2-h^2)-(x_1x_2-h^2)^2=-h^2(x_1-x_2)^2\leqslant 0. \qquad (4.163)$$

从(4.163)和(4.162)，我们有

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1^2-h^2}+\sqrt{x_2^2-h^2}\right)\leqslant\sqrt{\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2-h^2}.$$

而且等号成立当且仅当 $x_1=x_2$. 因而

$$f(x)=-\sqrt{x^2-h^2}$$

是一个凸函数，这里 h 是一个正常数，和 $x>h$.

应用这个结论于 $h^2=2(4u^2-c^2)$. 那么我们有

$$m_a+m_b=\frac{1}{2}(2m_a+2m_b)$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{4}(3u-x+3u+x)^2-2(4u^2-c^2)}$$
$$=\sqrt{u^2+2c^2} \qquad (4.164)$$

$$h_a+m_b+t_c\leqslant m_a+m_b+t_c$$
$$\leqslant\sqrt{u^2+2c^2}+\sqrt{u^2-\frac{c^2}{4}}. \tag{4.165}$$

而

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)=\frac{\sqrt{3}}{2}(2u+c). \tag{4.166}$$

下面我们证明

$$\sqrt{u^2+2c^2}+\sqrt{u^2-\frac{c^2}{4}}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(2u+c). \tag{4.167}$$

令 $y=\dfrac{2u}{c}$, $1<y\leqslant 2$. 则(4.167)的证明转化为去证明

$$\sqrt{y^2+8}+\sqrt{y^2-1}\leqslant\sqrt{3}(y+1). \tag{4.168}$$

显然,

$$3(y+1)^2-(\sqrt{y^2+8}+\sqrt{y^2-1})^2$$
$$=y^2+6y-4-2\sqrt{(y^2+8)(y^2-1)}. \tag{4.169}$$

而

$$(y^2+6y-4)^2-4(y^2+8)(y^2-1)$$
$$=-3y^4+12y^3-48y+48$$
$$=3(4-y^2)(y-2)^2\geqslant 0. \tag{4.170}$$

所以(4.167)的确成立. 换句话说,我们已经证明了: 当 $a+b\leqslant 2c$ 时,

$$h_a+m_b+t_c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c). \tag{4.171}$$

如果 $b+c\leqslant 2a$, 则应当有

$$m_b+m_c+t_a\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c). \tag{4.172}$$

而 $t_a\geqslant h_a$, $m_c\geqslant t_c$(注意(4.150)), 那么仍然有

$$h_a+m_b+t_c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c). \tag{4.173}$$

因此，还有一种情况：$a+b>2c$ 和 $b+c>2a$ 要考虑。

②当 $a+b>2c$ 和 $b+c>2a$ 时，由于

$$(a+b)+(b+c)>2c+2a,$$

那么 $2b>a+c$. 这时候,

$$\begin{aligned}4a+2c&<2(b+c)+(a+b)\\&=a+3b+2c.\end{aligned} \tag{4.174}$$

从而有 $a<b$.

类似地,

$$\begin{aligned}2a+4c&<(b+c)+2(a+b)\\&=2a+3b+c.\end{aligned} \tag{4.175}$$

从而有 $c<b$.

利用 $b<a+c$ 和 $a+b>2c$, 有

$$\begin{aligned}b<2(a+c)-b&<2a+(a+b)-b\\&=3a.\end{aligned} \tag{4.176}$$

再考虑到 $2a<b+c$, 有

$$\begin{aligned}b<2(a+c)-b&<2c+(b+c)-b\\&=3c.\end{aligned} \tag{4.177}$$

由于 $a+c<2b$, 那么，应当有

$$m_a+m_c+t_b\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c). \tag{4.178}$$

如果我们能证明

$$h_a-h_b<m_a-m_b. \tag{4.179}$$

那么利用 $t_c\leqslant m_c$ 和 $h_b\leqslant t_b$, 有

$$\begin{aligned}h_a+m_b+t_c&<m_a+h_b+t_c\leqslant m_a+t_b+m_c\\&\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).\end{aligned} \tag{4.180}$$

现在，我们来证明(4.179). 由于 $a<b$, 则 $h_a>h_b$, 和 $m_a>m_b$.

由于单位长度是人为的，不妨设 $b=1$. 那么，从上面的叙述，有

$$\frac{1}{3}<a<1,\ \ \frac{1}{3}<c<1. \tag{4.181}$$

显然 $a+c>1$.

利用公式(4.32)，我们有

$$\begin{aligned}16s^2&=2(a^2+c^2+a^2c^2)-(1+a^4+c^4)\\&=2(1+a^2)c^2-c^4-(1-a^2)^2.\end{aligned} \tag{4.182}$$

考虑函数 $f(z)=Az-z^2$，这里

$$\frac{1}{9}<z<1,$$

常数 $A>2$.

当 $\frac{1}{9}<z_1<z_2<1$ 时，$A>z_1+z_2$，

$$Az_1-z_1^2-(Az_2-z_2^2)=(z_1-z_2)(A-z_1-z_2)<0. \tag{4.183}$$

令 $z_1=c^2$，$z_2=\frac{1}{4}(1+a)^2$，由于 $a+1>2c$，则 $z_2>z_1$，令

$$A=2(1+a^2),$$

利用(4.183)，应当有

$$\begin{aligned}16s^2&=2(1+a^2)c^2-c^4-(1-a^2)^2\\&<\frac{1}{2}(1+a^2)(1+a)^2-\frac{1}{16}(1+a)^4-(1-a^2)^2\\&=\frac{1}{16}(1+a)^2(-9a^2+30a-9)\\&=\frac{3}{16}(1+a)^2(3-a)(3a-1).\end{aligned} \tag{4.184}$$

由于 $b=1$，利用上式，有

$$h_a - h_b = \frac{2s}{a} - 2s = \frac{2s}{a}(1-a).$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{3}}{8a}(1-a^2)\sqrt{(3-a)(3a-1)}. \tag{4.185}$$

我们知道

$$2m_a = \sqrt{2(1+c^2)-a^2},$$
$$2m_b = \sqrt{2(a^2+c^2)-1}. \tag{4.186}$$

当 $t_1>t_2>0$ 时，显然有

$$\sqrt{2(t_1+t_2)} > \sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}. \tag{4.187}$$

则

$$\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2} = \frac{t_1-t_2}{\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}} > \frac{t_1-t_2}{\sqrt{2(t_1+t_2)}}. \tag{4.188}$$

利用(4.188)，我们有

$$m_a - m_b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2(1+c^2)-a^2} - \sqrt{2(a^2+c^2)-1}\right)$$
$$> \frac{3}{2} \cdot \frac{(1-a^2)}{\sqrt{2(1+a^2+4c^2)}}$$
$$> \frac{3}{2} \frac{(1-a^2)}{\sqrt{2[1+a^2+(1+a)^2]}}$$
(利用 $2c<1+a$)
$$= \frac{3}{4} \frac{(1-a^2)}{\sqrt{1+a+a^2}}. \tag{4.189}$$

如果我们能证明

$$2\sqrt{3}a > \sqrt{(3-a)(3a-1)(1+a+a^2)}. \tag{4.190}$$

这里 $\frac{1}{3}<a<1$，则利用(4.185)、(4.189)，就有(4.179).

$$12a^2-(3-a)(3a-1)(1+a+a^2)$$
$$=12a^2+3(a^2+1)(1+a+a^2)-10a(1+a+a^2)$$

$$=3a^4-7a^3+8a^2-7a+3$$
$$=(a-1)^2(3a^2-a+3)>0. \tag{4.191}$$

于是，我们完全证明了(3).

下面我们谈第三节所建立的 Erdös-Mordell 不等式的一个有趣的几何应用.

例 20 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：$h_a+h_b+h_c\leqslant 3(R+r)$.

证明 取 P 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心. P 在 $\triangle ABC$ 的内部(参考图 3)、AD、BE 和 CF 为 $\triangle ABC$ 的高. 利用(3.71)、(3.72)，我们有

$$PA=2R\cos A,\ PB=2R\cos B,\ PC=2R\cos C. \tag{4.192}$$

读者一定知道

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

那么，

$$r=\frac{2s}{a+b+c}=\frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R(\sin A+\sin B+\sin C)}$$
$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \tag{4.193}$$

于是，

$$AP+BP+CP=2R(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$=2R\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=2(R+r). \tag{4.194}$$

利用 Erdös-Mordell 不等式和上面的等式，我们有

$$h_a+h_b+h_c=(AP+BP+CP)+(PD+PE+PF)$$
$$\leqslant\frac{3}{2}(AP+BP+CP)=3(R+r). \tag{4.195}$$

在本节，我们已举了20个有关一个三角形的不等式的问题. 下面向读者介绍一些有关两个或多个三角形，四边形和多边形的一些不等式.

例21 已知 h_a, h_b, h_c 和 h_{a^*}, h_{b^*}, h_{c^*} 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A^*B^*C^*$ 的边 a, b, c, a^*, b^*, c^* 上的高，求证:

$$h_a h_{a^*}+h_b h_{b^*}+h_c h_{c^*}\leqslant\frac{3}{4}(aa^*+bb^*+cc^*).$$

证明 读者一定知道，在 $\triangle ABC$ 中，

$$2Rh_a=\frac{2s}{\sin A}=bc,\quad 2Rh_b=\frac{2s}{\sin B}=ac,$$

$$2Rh_c=\frac{2s}{\sin C}=ab. \tag{4.196}$$

类似地，在 $\triangle A^*B^*C^*$ 中，有

$$2R^*h_{a^*}=b^*c^*,\ 2R^*h_{b^*}=a^*c^*,\ 2R^*h_{c^*}=a^*b^*. \tag{4.197}$$

这里 R^* 是 $\triangle A^*B^*C^*$ 的外接圆半径.

于是，我们有

$$\begin{aligned}
&h_a h_{a^*}+h_b h_{b^*}+h_c h_{c^*}\\
&=\frac{bcb^*c^*}{4RR^*}+\frac{aca^*c^*}{4RR^*}+\frac{aba^*b^*}{4RR^*}\\
&=4RR^*(\sin B\sin C\sin B^*\sin C^*\\
&\quad+\sin A\sin C\sin A^*\sin C^*\\
&\quad+\sin A\sin B\sin A^*\sin B^*)\\
&\leqslant\frac{4}{3}RR^*(\sin A\sin A^*+\sin B\sin B^*\\
&\quad+\sin C\sin C^*)^2\\
&\leqslant\frac{4}{3}RR^*(\sin A\sin A^*+\sin B\sin B^*\\
&\quad+\sin C\sin C^*)
\end{aligned}$$

$$\cdot(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot(\sin^2 A^*+\sin^2 B^*+\sin^2 C^*)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{4}{3}RR^*(\sin A\sin A^*+\sin B\sin B^*+\sin C\sin C^*)$$

$$\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{（利用第三节(3.9)和(3.10)）}$$

$$=\frac{3}{4}(aa^*+bb^*+cc^*). \tag{4.198}$$

例 22 $\triangle ABC$ 的三边分别是 a, b, c, 外接圆半径是 R, $\triangle A^*B^*C^*$ 的三边分别是 a^*, b^*, c^*, 求证:

$$\frac{a^2}{a^*}+\frac{b^2}{b^*}+\frac{c^2}{c^*}\leqslant R^2\frac{(a^*+b^*+c^*)^2}{a^*b^*c^*}.$$

证明 我们来证明等价的不等式

$$(a^*+b^*+c^*)^2-\frac{1}{R^2}(a^2b^*c^*+b^2a^*c^*+c^2a^*b^*)\geqslant 0. \tag{4.199}$$

显然地，我们可以看到

$$(a^*+b^*+c^*)^2-\frac{1}{R^2}(a^2b^*c^*+b^2a^*c^*+c^2a^*b^*)$$

$$=(a^*+b^*+c^*)^2-4(\sin^2 Ab^*c^*+\sin^2 Ba^*c^*+\sin^2 Ca^*b^*)$$

$$=(a^{*2}+b^{*2}+c^{*2})$$

$$+2(b^*c^*\cos 2A+a^*c^*\cos 2B+a^*b^*\cos 2C)$$

$$=(a^*+b^*\cos 2C+c^*\cos 2B)^2+b^{*2}\sin^2 2C+c^{*2}\sin^2 2B$$

$$+2b^*c^*(\cos 2A-\cos 2B\cos 2C)$$

$$=(a^*+b^*\cos 2C+c^*\cos 2B)^2+(b^*\sin 2C-c^*\sin 2B)^2$$

$$\geqslant 0. \tag{4.200}$$

这里我们利用了关系式

$$\cos 2A=\cos(2B+2C)=\cos 2B\cos 2C-\sin 2B\sin 2C.$$

从例 22 可以看出，适当的恒等式变换技巧是非常有用的．在证明有关边的不等式时别忘记三角形的正弦定理和余弦定理．

例 23 有 n 个 $\triangle A_iB_iC_i(1\leqslant i\leqslant n)$，$\triangle A_iB_iC_i$ 的三边分别为 a_i, b_i, c_i, 面积为 s_i. 求证：

(1) 以 $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 为三边可以组成一个 $\triangle ABC$.

(2) $s\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i$, 这里 s 是 $\triangle ABC$ 的面积.

(3) $$\sum_{i\neq j}(a_i^2b_j^2+b_i^2c_j^2+c_i^2a_j^2)-\sum_{i<j}(a_i^2a_j^2+b_i^2b_j^2+c_i^2c_j^2)$$
$$\geqslant 16\sum_{i<j}s_is_j.$$

证明 (1) 令

$$a=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad b=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad c=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.201}$$

由于 $c_i<a_i+b_i$, 并且利用 Minkowski 不等式(2.93)，我们有

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)^{\frac{1}{2}}<\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{\sqrt{n}}+\frac{b_i}{\sqrt{n}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{\sqrt{n}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{\sqrt{n}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.202}$$

从(4.202)和(4.201)，我们知道 $c<a+b$. 完全类似可以证明 $b<a+c$, $a<b+c$. 这表明以 a, b, c 为三边的 $\triangle ABC$ 的确存在.

(2) 首先，我们要证明一个很重要的不等式

$$a_i^2(b_j^2+c_j^2-a_j^2)$$
$$+b_i^2(c_j^2+a_j^2-b_j^2)$$
$$+c_i^2(a_j^2+b_j^2-c_j^2)$$
$$\geqslant 16 s_i s_j. \quad (1\leqslant i,\ j\leqslant n) \tag{4.203}$$

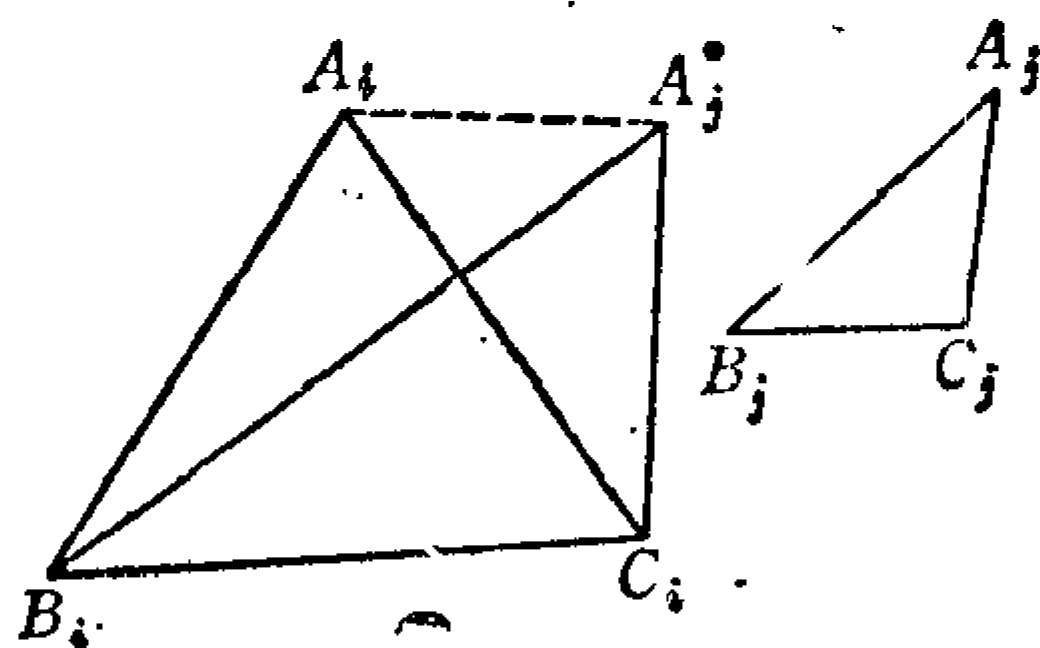


图 11

以 B_iC_i 为边在点 A_i 同侧作 $\triangle A_j^*B_iC_i \backsim \triangle A_jB_jC_j$(图11)。于是，我们有

$$\frac{A_j^*C_i}{b_j}=\frac{a_i}{a_j}, \tag{4.204}$$

那么，$A_j^*C_i=\dfrac{b_ja_i}{a_j}$. $\angle A_iC_iA_j^*=|C_i-C_j|$.

在 $\triangle A_iC_iA_j^*$ 中，利用余弦定理，有

$$b_i^2+A_j^*C_i^2-2b_iA_j^*C_i\cos(C_i-C_j)=A_iA_j^{*2}\geqslant 0. \tag{4.205}$$

请读者注意，当 $\angle C_i=\angle C_j$ 时，(4.205)还是正确的. 于是，我们有

$$b_i^2+\left(\frac{b_ja_i}{a_j}\right)^2-2b_i\frac{b_ja_i}{a_j}(\cos C_i\cos C_j+\sin C_i\sin C_j)$$
$$\geqslant 0. \tag{4.206}$$

利用

$$\cos C_i=\frac{1}{2a_ib_i}(a_i^2+b_i^2-c_i^2),$$
$$\cos C_j=\frac{1}{2a_jb_j}(a_j^2+b_j^2-c_j^2),$$
$$2s_i=a_ib_i\sin C_i,\ 2s_j=a_jb_j\sin C_j, \tag{4.207}$$

那么，(4.206)两端乘以 a_j^2 后，我们可以看到

$$0\leqslant b_i^2a_j^2+b_j^2a_i^2-\frac{1}{2}(a_i^2+b_i^2-c_i^2)(a_j^2+b_j^2-c_j^2)-8s_is_j$$

$$= \frac{1}{2}a_i^2(b_j^2+c_j^2-a_j^2)+\frac{1}{2}b_i^2(c_j^2+a_j^2-b_j^2)$$

$$+\frac{1}{2}c_i^2(a_j^2+b_j^2-c_j^2)-8s_is_j. \qquad (4.208)$$

所以，(4.203)的确成立.

对于(4.203)两端关于 i, j 从 1 到 n 求和，并且利用(4.201)，那么，我们有

$$n^2[a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)]$$

$$\geqslant 16\left(\sum_{i=1}^{n}s_i\right)^2. \qquad (4.209)$$

由于 a, b, c 恰是 $\triangle ABC$ 的三条边，从(4.32)，有

$$16s^2=a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2). \qquad (4.210)$$

将(4.210)代入(4.209)，我们可以看到

$$n^2s^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}s_i\right)^2. \qquad (4.211)$$

两端开方，有

$$s\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i. \qquad (4.212)$$

(3) (4.203)两端关于 $i<j$ 求和，我们有

$$16\sum_{i<j}s_is_j\leqslant\sum_{i<j}a_i^2(b_j^2+c_j^2-a_j^2)+\sum_{i<j}b_i^2(c_j^2+a_j^2-b_j^2)$$

$$+\sum_{i<j}c_i^2(a_j^2+b_j^2-c_j^2)$$

$$=\sum_{i<j}(a_i^2b_j^2+b_i^2a_j^2+b_i^2c_j^2+c_i^2b_j^2+c_j^2a_i^2+c_i^2a_j^2)$$

$$-\sum_{i<j}(a_i^2a_j^2+b_i^2b_j^2+c_i^2c_j^2)$$

$$=\sum_{i\neq j}(a_i^2b_j^2+b_i^2c_j^2+c_i^2a_j^2)$$

$$-\sum_{i<j}(a_i^2a_j^2+b_i^2b_j^2+c_i^2c_j^2). \qquad (4.213)$$

这样，例 23 的全部不等式都得到了证明.

特别当$n=2$时，我们从(3)，可以看到

$$a_1^2(b_2^2+c_2^2-a_2^2)+b_1^2(a_2^2+c_2^2-b_2^2)+c_1^2(a_2^2+b_2^2-c_2^2)$$
$$\geqslant 16s_1s_2. \tag{4.214}$$

这就是著名的匹多(Pedoэ)不等式.

现在我们来看四边形.

例 24 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 a, b, c, d, 圆半径为 R, 求证：

(1) $a+b+c+d\leqslant 4\sqrt{2}R$.

(2) $abcd\leqslant 4R^4$.

证明 (1) 设这四边形各边 a, b, c, d 所对圆心角分别为 θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, 这里 $0<\theta_i\leqslant\pi(1\leqslant i\leqslant 4)$.

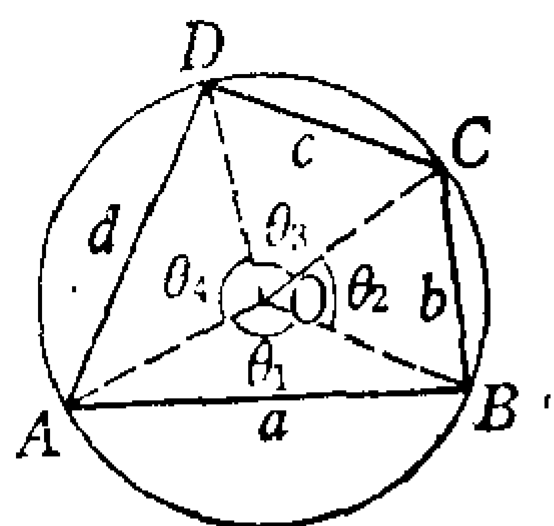


图 12

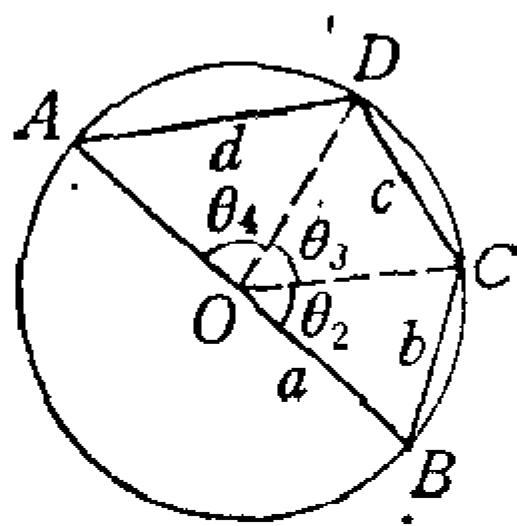


图 13

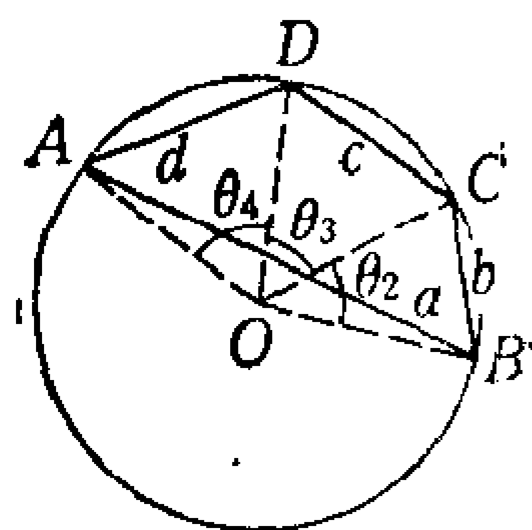


图 14

当圆心 O 在这四边形内部或边上时(图 12, 图 13), 有

$$\sum_{i=1}^{4}\theta_i=2\pi. \tag{4.215}$$

当圆心 O 在这四边形外部时(图 14), 我们有

$$\sum_{i=1}^{4}\theta_i<2\pi. \tag{4.216}$$

于是，无论那一种情况，都有

$$a+b+c+d=2R\left(\sin\frac{\theta_1}{2}+\sin\frac{\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_3}{2}+\sin\frac{\theta_4}{2}\right)$$

$$\leqslant 8R\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{8}\leqslant 8R\sin\frac{\pi}{4} \quad (4.217)$$

$$=4\sqrt{2}R.$$

(2) 利用 $G_4\leqslant A_4$，我们有

$$abcd\leqslant\left[\frac{1}{4}(a+b+c+d)\right]^4$$

$$\leqslant(\sqrt{2}R)^4 \quad (\text{利用}(4.217))$$

$$=4R^4. \quad (4.218)$$

例 25 已知凸四边形 $ABCD$ 既有内切圆，又有外接圆，设内切圆半径为 r，外接圆半径为 R，求证：$R\geqslant\sqrt{2}r$.

在解决例 25 之前，我们先证明一个有关凸四边形面积 s 与四边长 a, b, c, d 的公式.

引理 已知凸四边形 $ABCD$ 的边长分别为 a, b, c, d，其中一组对角和为 2θ，

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d),$$

则这凸四边形面积 s 满足关系式

$$s^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\theta.$$

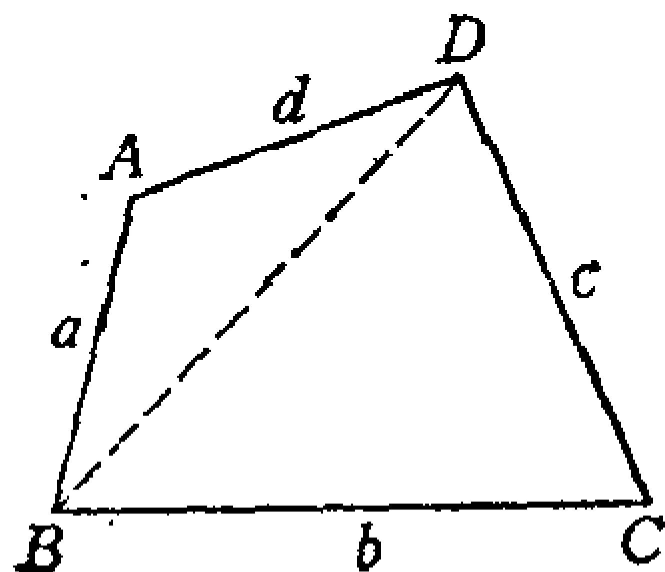


图 15

证明 从图 15，我们可以看到

$$s=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C,$$

上式两边平方，并且两端乘以 4，有

$$4s^2=a^2d^2\sin^2A+b^2c^2\sin^2C+2abcd\sin A\sin C$$

$$=a^2d^2(1-\cos^2A)+b^2c^2(1-\cos^2C)$$

$$+2abcd[\cos A\cos C-\cos(A+C)]$$

$$=a^2d^2+b^2c^2-(ad\cos A-bc\cos C)^2$$

$$-2abcd\cos(A+C) \quad (4.219)$$

设角 A 与角 C 之和为 2θ(或者为 $2\pi-2\theta$). 另外, 利用三角形的余弦定理,我们有

$$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A, \tag{4.220}$$

和

$$BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C. \tag{4.221}$$

上面两个等式相减,有

$$ad\cos A-bc\cos C=\frac{1}{2}(a^2+d^2-b^2-c^2). \tag{4.222}$$

将(4.222)代入(4.219),那么,我们有

$$\begin{aligned}4s^2&=a^2d^2+b^2c^2-\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-2abcd\cos 2\theta\\&=a^2d^2+b^2c^2-\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2\\&\quad-2abcd(2\cos^2\theta-1)\\&=(ad+bc)^2-\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-4abcd\cos^2\theta\\&=\frac{1}{4}[2(ad+bc)+(a^2+d^2-b^2-c^2)]\\&\quad\cdot[2(ad+bc)-(a^2+d^2-b^2-c^2)]\\&\quad-4abcd\cos^2\theta\\&=\frac{1}{4}[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]\\&\quad-4abcd\cos^2\theta\\&=\frac{1}{4}(2p-2c)(2p-2b)(2p-2d)(2p-2a)\\&\quad-4abcd\cos^2\theta\\&=4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-4abcd\cos^2\theta.\end{aligned} \tag{4.223}$$

于是引理成立．现在可以证明例 25 了．

例 25 的证明 明显地，凸四边形 $ABCD$ 的面积

$$s=\frac{1}{2}r(a+b+c+d)=rp. \tag{4.224}$$

由于凸边形 $ABCD$ 有外接圆，$2\theta=\pi$，利用引理和 $G_4\leqslant A_4$，我们有

$$\begin{aligned}s&=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\\&\leqslant\left\{\frac{1}{4}[(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)]\right\}^2\\&=\frac{p^2}{4}.\end{aligned} \tag{4.225}$$

从(4.224)和(4.225)，我们有

$$4r\leqslant p. \tag{4.226}$$

从例 24 的(1)，我们知道 $p\leqslant2\sqrt{2}R$，那么，

$$\sqrt{2}r\leqslant R. \tag{4.227}$$

当 $R=\sqrt{2}r$ 时，显然上述不等式都应取等号，从而必有

$$a=b=c=d,$$

凸四边形 $ABCD$ 是正方形，当然凸四边形 $ABCD$ 是正方形时，$R=\sqrt{2}r$．

例 26 设凸四边形 $ABCD$ 的四条边分别为 a、b,c,d，求证：$ab+ac+ad+bc+bd+cd\geqslant6s$．这里 s 是这凸四边形的面积，其中等号当且仅当 $ABCD$ 为正方形时成立．

证明 记 $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$，和变换(4.6)类似，令

$$p-a=x,\ p-b=y,\ p-c=z,\ p-d=t.$$

明显地 x, y, z, t 全是正实数．$x+y+z+t=2p$．

$$\begin{aligned}&ab+ac+ad+bc+bd+cd\\&\quad=(p-x)(p-y)+(p-x)(p-z)+(p-x)(p-t)\end{aligned}$$

$$+(p-y)(p-z)+(p-y)(p-t)+(p-z)(p-t)$$
$$=6p^2-3p(x+y+z+t)+(xy+xz+xt+yz+yt+zt)$$
$$=xy+xz+xt+yz+yt+zt \quad (\text{利用 } x+y+z+t=2p)$$
$$\geqslant 6\sqrt[6]{x^3y^3z^3t^3} \quad (\text{利用 } A_6\geqslant G_6) = 6\sqrt{xyzt}$$
$$\geqslant 6s \quad (\text{利用例 25 的引理}). \tag{4.228}$$

等号成立当且仅当 x, y, z, t 全部相等, 和这凸四边形 $ABCD$ 内接于圆, 于是四边形 $ABCD$ 是正方形.

例 27 在凸四边形 $ABCD$ 中, a, b, c, d 是边长, a, c 为一对边, b, d 是另一对边, 求证:

$$a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}$$
$$\geqslant 4s^n+\frac{1}{2}[(a^n-b^n)^2+(b^n-c^n)^2+(c^n-d^n)^2+(d^n-a^n)^2],$$

这里 s 是这四边形的面积, n 是自然数.

证明 由于

$$a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}$$
$$-\frac{1}{2}[(a^n-b^n)^2+(b^n-c^n)^2+(c^n-d^n)^2+(d^n-a^n)^2]$$
$$=a^nb^n+b^nc^n+c^nd^n+d^na^n. \tag{4.229}$$

所以只要证明

$$a^nb^n+b^nc^n+c^nd^n+d^na^n\geqslant 4s^n. \tag{4.230}$$

就可以了.

从图 16, 我们有

$$s=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(ab+cd). \tag{4.231}$$

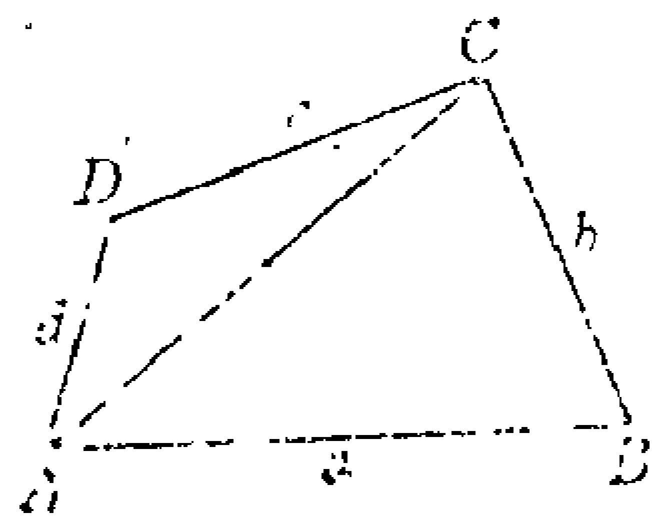


图 16

同理, 我们有

$$s\leqslant\frac{1}{2}(bc+ad). \tag{4.232}$$

(4.231)和(4.232)相加，可得

$$s\leqslant\frac{1}{4}(a+c)(b+d). \tag{4.233}$$

从而

$$\begin{aligned}&a^nb^n+b^nc^n+c^nd^n+d^na^n=(a^n+c^n)(b^n+d^n)\\&\geqslant 2\left(\frac{a+c}{2}\right)^n\cdot 2\left(\frac{b+d}{2}\right)^n \quad (\text{利用第一节不等式}(1.4))\\&=4\left[\frac{1}{4}(a+c)(b+d)\right]^n\geqslant 4s^n. \qquad (2.234)\end{aligned}$$

对于两个四边形，我们有下述不等式.

例 28 有两个凸四边形，一个凸四边形的边长分别用 a, b, c, d 表示，面积为 s；另一个边长是 a^*, b^*, c^*, d^*，面积为 s^*，求证：

$$\begin{aligned}&4(ab+cd)(a^*b^*+c^*d^*)\\&\quad-(a^2+b^2-c^2-d^2)(a^{*2}+b^{*2}-c^{*2}-d^{*2})\\&\geqslant 16ss^*.\end{aligned}$$

证明 从例 25 的引理，我们知道

$$\begin{aligned}&16s^2+16abcd\cos^2\theta\\&=(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)\\&\quad\cdot(a+b+c-d)\\&=[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]\\&=[2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)]\\&\quad\cdot[2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)]\\&=4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2. \qquad (4.235)\end{aligned}$$

同理，有

$$\begin{aligned}&16s^{*2}+16a^*b^*c^*d^*\cos^2\theta^*\\&=4(a^*b^*+c^*d^*)^2-(a^{*2}+b^{*2}-c^{*2}-d^{*2})^2. \qquad (4.236)\end{aligned}$$

这里 θ^* 的意义同 θ 完全类似.

对于 4 个实数 p, q, x, y. 我们有

$$(px-qy)^2=(p^2-q^2)(x^2-y^2)+(py-qx)^2. \qquad (4.237)$$

当 $px-qy>0$ 时, 我们从上式, 可以看到

$$px-qy\geqslant\sqrt{(p^2-q^2)(x^2-y^2)}. \qquad (4.238)$$

令

$$p=2(ab+cd),\ q=a^2+b^2-c^2-d^2,$$
$$x=2(a^*b^*+c^*d^*),\ y=a^{*2}+b^{*2}-c^{*2}-d^{*2}. \qquad (4.239)$$

由于(4.235)的左端是正的, 再兼顾(4.239), 我们立即可以得到下述不等式

$$p>|q|. \qquad (4.240)$$

类似地从(4.236)和(4.239), 也有

$$x>|y|, \qquad (4.241)$$

那么, $px-qy>0$. 利用(4.235)和(4.236), 我们可以看到

$$p^2-q^2\geqslant16s^2,\ x^2-y^2\geqslant16s^{*2}. \qquad (4.242)$$

再利用不等式(4.238), 有

$$\begin{aligned}&4(ab+cd)(a^*b^*+c^*d^*)\\&\quad-(a^2+b^2-c^2-d^2)(a^{*2}+b^{*2}-c^{*2}-d^{*2})\\&=px-qy\\&\geqslant\sqrt{(p^2-q^2)(x^2-y^2)}\geqslant16ss^*.\end{aligned} \qquad (4.243)$$

现在, 我们转到多边形.

例 29 一个圆的外切凸 n 边形($n\geqslant3$)的面积为 1, 求证: 在这 n 边形内部有一点到每条边的距离不超过 $\sqrt{\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}$.

证明 如图 17, 设凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积是 1, 其内切圆圆心为 O, 半径是 r. 自然地, 要计算 O 到每条边的距离的上界, 也就是计算 r 的上界.

这个 n 边形可分成 $2n$ 个以 O 为一个公共顶点的三角形, 这些三角形的面积之和恰为这 n 边形的面积.

于是，我们有

$$
\begin{aligned}
&1-r^2\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{A_i}{2}\\
&\geqslant nr^2\operatorname{ctg}\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}A_i \quad (\text{利用第一节不等式(1.69)})\\
&=nr^2\operatorname{ctg}\frac{n-2}{2n}\pi=nr^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.
\end{aligned}
\tag{4.244}
$$

所以，

$$r\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}.\tag{4.245}$$

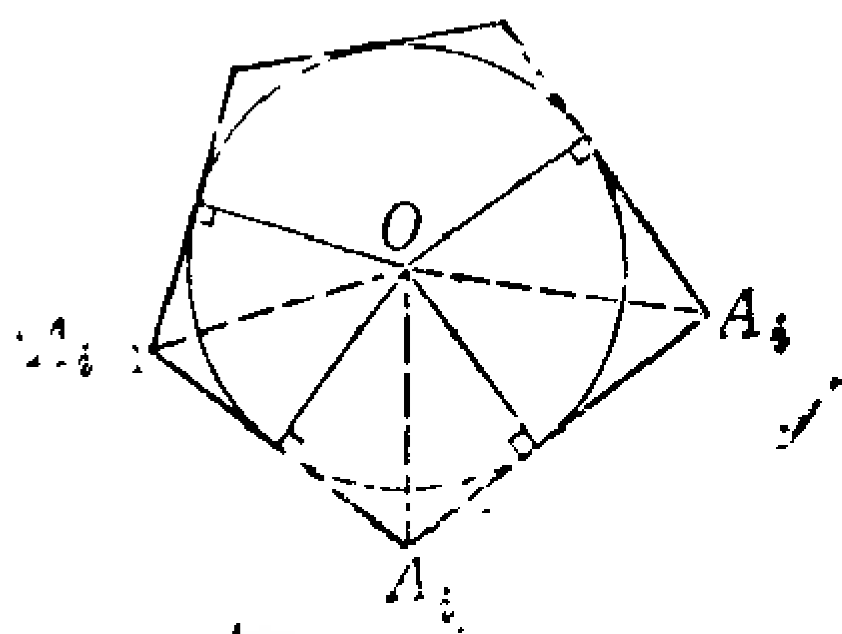


图 17

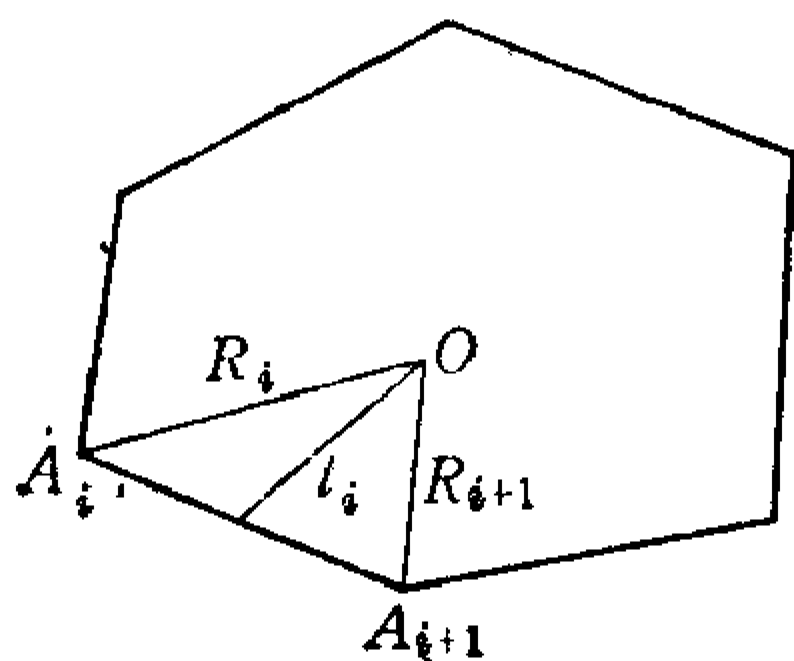


图 18

例 30 $A_1A_2\cdots A_n$ 是一个凸 n 边形，O 是这凸 n 边形内部一点，OA_i 长是 $R_i(1\leqslant i\leqslant n)$，$t_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 $\angle A_iOA_{i+1}$ 的内角平分线长，求证：

$$\sqrt[n]{\frac{t_1t_2\cdots t_n}{R_1R_2\cdots R_n}}\leqslant\cos\frac{\pi}{n}.$$

证明 如图 18，记 $\angle A_iOA_{i+1}=2\theta_i\left(0<\theta_i<\frac{\pi}{2},\ 1\leqslant i\leqslant n,\right.$ $\left.A_{n+1}=A_1\right)$．由公式(4.88)，我们可以得到

$$t_i=\frac{2R_iR_{i+1}}{R_i+R_{i+1}}\cos\theta_i(1\leqslant i\leqslant n).$$

于是，

$$\cos\theta_i=\frac{t_i(R_i+R_{i+1})}{2R_iR_{i+1}}=\frac{t_i}{2}\left(\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_{i+1}}\right)$$

$$\geqslant \frac{t_i}{\sqrt{R_iR_{i+1}}} \quad \left(利用\sqrt{R_iR_{i+1}} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_{i+1}}}\right). \tag{4.246}$$

而由第一节，我们知道

$$f(x) = -\cos x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

是一个凸函数，那么，我们可以看到

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{n} &\geqslant \frac{1}{n}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n) \\ &\quad \left(利用\sum_{i=1}^{n}\theta_i = \pi\right) \\ &\geqslant \frac{1}{n}\left(\frac{t_1}{\sqrt{R_1R_2}} + \frac{t_2}{\sqrt{R_2R_3}} + \cdots + \frac{t_n}{\sqrt{R_nR_1}}\right) \\ &\quad (利用(4.246)) \\ &\geqslant \sqrt[n]{\frac{t_1}{\sqrt{R_1R_2}} \cdot \frac{t_2}{\sqrt{R_2R_3}} \cdots \frac{t_n}{\sqrt{R_nR_1}}} \\ &\quad (利用\ A_n \geqslant G_n) \\ &= \sqrt[n]{\frac{t_1t_2\cdots t_n}{R_1R_2\cdots R_n}}. \end{aligned} \tag{4.247}$$

下面的例子很有意思，虽然不用 Jensen 不等式就能解决它.

例 31 H 表示边长是 1 的正 n 边形($n \geqslant 4$). 如果 K 是 H 内一个 n 边形，K 的顶点位于 H 的每边上，K 的边长是 $x_i(1 \leqslant i \leqslant n)$. 求证：

$$\frac{n}{2}(1-\cos\theta) \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant n(1-\cos\theta),$$

这里 θ 是 H 的一个内角.

证明 H 的顶点用 A_i 表示，K 的顶点用 B_i 表示，B_i 位于边 A_iA_{i+1} 上，$A_{n+1} = A_1$，x_i 表示 $B_{i-1}B_i$ 的长，y_i 表示

$B_{i-1}A_i$ 的长(图 19), $B_0 = B_n$, 于是 $y_{n+1} = y_1$. 在 $\angle B_{i-1}A_iB_i$ 内,

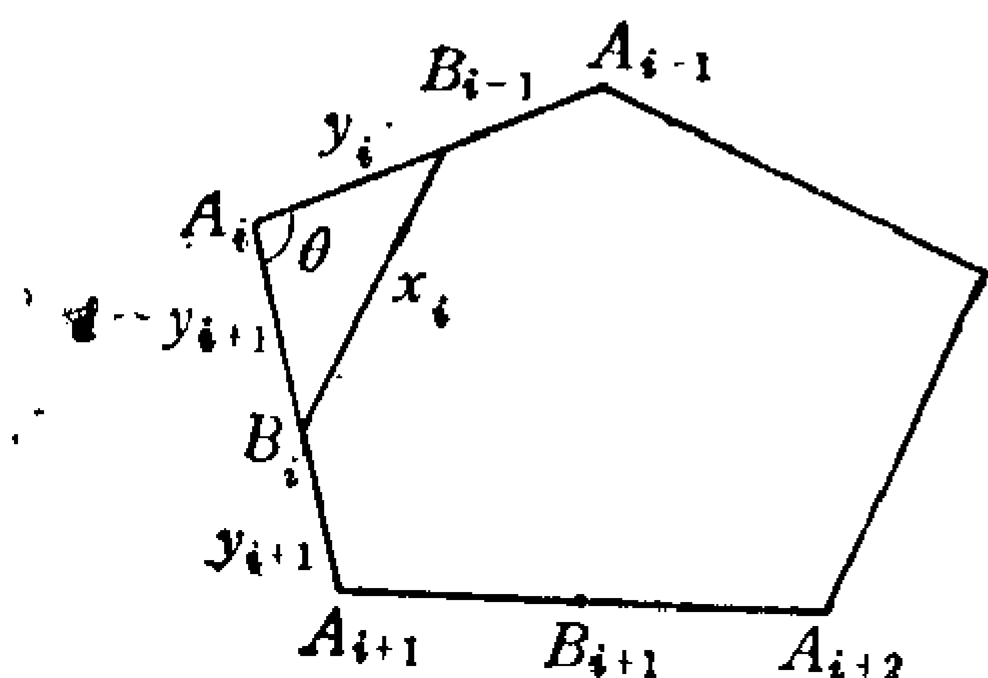


图 19

$B_{i-1}B_i = x_i$, $A_iB_i = 1 - y_{i+1}$, $B_{i-1}A_i = y_i$, $\angle B_{i-1}A_iB_i = \theta$. 利用余弦定理,我们有

$$x_i^2 = y_i^2 + (1-y_{i+1})^2 - 2y_i(1-y_{i+1})\cos\theta. \tag{4.248}$$

由于 $n \geqslant 4$, 那么

$$\theta = \frac{n-2}{n}\pi \geqslant \frac{\pi}{2},$$

$\cos\theta \leqslant 0$.

显然, $0 \leqslant y_i \leqslant 1$, 和

$$2y_iy_{i+1}\cos\theta \geqslant (y_i^2+y_{i+1}^2)\cos\theta,$$

$$-2y_i(1-y_{i+1})\cos\theta \leqslant -[y_i^2+(1-y_{i+1})^2]\cos\theta. \tag{4.249}$$

将(4.249)代入(4.248), 我们有

$$y_i^2+(1-y_{i+1})^2-2y_i\cos\theta+(y_i^2+y_{i+1}^2)\cos\theta \leqslant x_i^2 \leqslant [y_i^2+(1-y_{i+1})^2](1-\cos\theta). \tag{4.250}$$

从(4.250), 我们可以看到

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^n [y_i^2+(1-y_{i+1})^2-2y_i\cos\theta+(y_i^2+y_{i+1}^2)\cos\theta]$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i^2 + \sum_{i=1}^n (1-y_i)^2 - 2\cos\theta\sum_{i=1}^n y_i + 2\cos\theta\sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$= 2(1+\cos\theta)\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2(1+\cos\theta)\sum_{i=1}^n y_i + n$$

$$= 2(1+\cos\theta)\sum_{i=1}^n\left(y_i - \frac{1}{2}\right)^2 + n - \frac{n}{2}(1+\cos\theta)$$

$$\geqslant \frac{n}{2}(1-\cos\theta). \qquad (4.251)$$

另一方面，我们有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant (1-\cos\theta)\sum_{i=1}^{n}[y_i^2+(1-y_{i+1})^2]$$

$$=(1-\cos\theta)\left[2\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\sum_{i=1}^{n}y_i+n\right]$$

$$=(1-\cos\theta)\left[\frac{n}{2}+2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\frac{1}{2}\right)^2\right]. \qquad (4.252)$$

由于 $0\leqslant y_i\leqslant 1$，则

$$\left(y_i-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4},$$

那么，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant n(1-\cos\theta). \qquad (4.253)$$

下面一例是美国第 39 届大学生数学竞赛题目的一个改进.

例 32 平面上给定 n 个不同的点，求证：距离为 1 的点偶数目不多于 $\frac{2}{\sqrt{7}}n^{\frac{3}{2}}$.

注：原题数目是不多于 $2n^{\frac{3}{2}}$，王志雄编《美苏大学生数学竞赛题解》(初等数学部分)解答是数目不多于 $\frac{\sqrt{3}}{2}n^{\frac{3}{2}}$. 显然

$$\frac{2}{\sqrt{7}}n^{\frac{3}{2}}<\frac{\sqrt{3}}{2}n^{\frac{3}{2}}.$$

证明 给定 n 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，设 e_i 是 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 内与点 P_i 的距离等于 1 的点的数目，则距离为 1 的点偶数目

$$E=\frac{1}{2}(e_1+e_2+\cdots+e_n). \qquad (4.254)$$

以 $P_i(1\leqslant i\leqslant n)$为圆心，1 为半径作圆 c_i，一共有 n 个圆 c_1,

$c_2, \cdots, c_n$. 因为任两个不同的圆至多只有两个交点，所以这 n 个圆至多有 $2C_n^2=n(n-1)$ 个交点.

另一方面，由于有 e_i 个点与点 P_i 的距离为 1，所以这 e_i 个点为圆心的 e_i 个半径为 1 的圆必两两相交或相切，至少有

$$C_{e_i}^2=\frac{1}{2}e_i(e_i-1)$$

个交点(在点 P_i 相交的重数). 因而有不等式

$$\begin{aligned}
n(n-1) &\geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i(e_i-1)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2-E\\
&\geqslant \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)^2-E \quad \text{(利用第一节不等式(1.66))}\\
&=\frac{2}{n}E^2-E.
\end{aligned} \tag{4.255}$$

从(4.255)，我们有

$$2E^2-nE-n^2(n-1)\leqslant 0. \tag{4.256}$$

一元二次方程

$$2E^2-nE-n^2(n-1)=0 \tag{4.257}$$

有两个根 $\frac{n}{4}[1-\sqrt{8n-7}]$ 和 $\frac{n}{4}[1+\sqrt{8n-7}]$.

因而我们有

$$E\leqslant\frac{n}{4}[1+\sqrt{8n-7}]. \tag{4.258}$$

明显地，

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\sqrt{n}-1\right)^2-(8n-7)\\
&\quad=\frac{64}{7}n-\frac{16}{\sqrt{7}}\sqrt{n}-8n+8
\end{aligned}$$

$$=\frac{8}{7}n+8-\frac{16}{\sqrt{7}}\sqrt{n}$$

$$\geqslant 0 \quad (\text{利用 } A_2 \geqslant G_2). \tag{4.259}$$

利用(4.259)，我们可以得到

$$E \leqslant \frac{2}{\sqrt{7}} n^{\frac{3}{2}}. \tag{4.260}$$

平面几何与三角是密切相关的，本节最后的三个例子是几何与三角混合不等式.

例 33 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2} \leqslant \frac{9R^2}{4s}.$$

证明 读者都知道

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}. \tag{4.261}$$

于是，

$$s\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$

$$=\frac{rs}{p-a}+\frac{rs}{p-b}+\frac{rs}{p-c}$$

$$=\frac{s^2}{p(p-a)}+\frac{s^2}{p(p-b)}+\frac{s^2}{p(p-c)}$$

$$=(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)$$

$$=ab+bc+ca-p^2$$

$$=ab+bc+ca-\frac{1}{4}(a+b+c)^2$$

$$=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)-\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

(利用 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$)

$$=R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$$

$$\leqslant\frac{9}{4}R^2\quad(\text{利用第三节}(3.9)\text{和}(3.10)).$$

$$(4.262)$$

例 34 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C\geqslant\frac{\sqrt{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{9abc}.$$

证明 读者一定知道

$$\operatorname{ctg} A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{2R\cos A}{a},\qquad(4.263)$$

和

$$\operatorname{ctg} B=\frac{2R\cos B}{b},\ \operatorname{ctg} C=\frac{2R\cos C}{c}.\qquad(4.264)$$

于是

$$abc(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)$$

$$=2R(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C)$$

$$=R[(b^2+c^2-a^2)+(a^2+c^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)]$$

$$=R(a^2+b^2+c^2)$$

$$\geqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\quad(\text{利用本节例 1}).$$

所以，我们有

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C\geqslant\frac{\sqrt{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{9abc}.$$

$$(4.265)$$

例 35 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$h_a+h_b+h_c\leqslant a\sin A+b\sin B+c\sin C.$$

证明 读者知道

$$2Rh_a=bc,\ 2Rh_b=ac,\ 2Rh_c=ab.\qquad(4.266)$$

于是，

$$h_a+h_b+h_c=\frac{1}{2R}(bc+ac+ab)$$
$$\leqslant\frac{1}{2R}(a^2+b^2+c^2)$$
$$=a\sin A+b\sin B+c\sin C.$$
(4.267)

本节是这本小册子的重点，在各种数学竞赛中，平面几何是一个很重要的内容．但是对参加数学竞赛的同学们而言，平面几何往往是较弱的一环．我希望这部分内容对同学们会有些帮助．

习　题　四

1．求证：在具有公共底边 a 和周长 $2p$ 的所有三角形中，以等腰三角形具有最大的面积．这里 p 是正常数．

$\left(\text{提示：利用 } s\leqslant\frac{a}{2}\sqrt{p(p-a)}.\right)$

2．求证：在具有公共底边 a 和面积 s（s 是正常数）的所有三角形中，以等腰三角形具有最小周长．

（提示：设 h_a 的垂足分底边 a 为两线段 x，$a\pm x$，$b+c=\sqrt{h_a^2+x^2}+\sqrt{h_a^2+(a\pm x)^2}$，再利用 $f(x)=\sqrt{h_a^2+x^2}$ 是凸函数．）

3．求证：在具有给定周长 $2p$ 的所有三角形中，等边三角形有最大的面积．

$\left(\text{提示：利用 } s\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}.\right)$

4．求证：在外切于给定圆的所有三角形中，等边三角形有最小面积与最小周长．

$\left(\text{提示：利用 } s=r^2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)\geqslant3\sqrt{3}r^2,\text{和}\right.$

$$\left.2p=2r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)\geqslant6\sqrt{3}r.\right)$$

5．求证：在内接于给定圆的所有三角形中，等边三角形有最大周长和最大面积．

(提示：利用$2p\leqslant3\sqrt{3}R$(见本节例1),和$s=2R^2\sin A\sin B\sin C$.)

6. 在给定周长$2p$的所有三角形中，求证：等边三角形有最小的外接圆.

$\left(\text{提示：利用 } R=\dfrac{p}{\sin A+\sin B+\sin C}.\right)$

7. 在$\triangle ABC$中，求证：

$$\frac{\sqrt{3}}{R}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2r}.$$

(提示：利用本节例1和例12.)

8. 在$\triangle ABC$中，直接证明：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca\geqslant4\sqrt{3}s$.

(提示：令$p-a=x$, $p-b=y$, $p-c=z$, $ab+bc+ca=\frac{8}{9}p^2+\frac{1}{9}p^2+xy+yz+zx$，再利用$p^2\geqslant3\sqrt{3}s$和$A_4\geqslant G_4$.)

9. 在$\triangle ABC$中，求证：

(1) $\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}<\dfrac{1}{2}$;

(2) $3\leqslant\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}<4$.

(提示：注意本节(4.20).)

10. 在$\triangle ABC$中，求证：$\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leqslant\sqrt{3p}$.

(提示：利用$f(x)=-\sqrt{x}\ (x>0)$是一个凸函数.)

11. 求证：三角形内任意两边的乘积大于内切圆直径与外接圆直径的乘积.

$\left(\text{提示：利用 } r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\text{，估计 }\dfrac{bc}{4Rr}.\right)$

12. 设P为$\triangle ABC$内任意一点，求证：$3(PA^2+PB^2+PC^2)\geqslant a^2+b^2+c^2$.

(提示：在$\triangle PAB$，$\triangle PBC$和$\triangle PCA$中利用余弦定理，请注意(4.200).)

13. 在$\triangle ABC$中，求证：$t_a^6+t_b^6+t_c^6\leqslant p^4(p^2-12rR)\leqslant m_a^6+m_b^6+m_c^6$.

(提示，先证明$p^4(p^2-12rR)=p^3[(p-a)^3+(p-b)^3+(p-c)^3]$. 再利用$t_a\leqslant\sqrt{p(p-a)}$和$m_a^2\geqslant p(p-a)$等.)

14. 在$\triangle ABC$中，P是$\triangle ABC$内一点，P到a, b, c三边距离分别为

u, v, w. 记 $AP=x$, $BP=y$, $CP=z$, 求证:

(1) $ux+vy+wz\geqslant 2(uv+vw+wu)$.

(2) $xyz\geqslant (u+v)(v+w)(w+u)\geqslant 8uvw$.

(提示: (1) 利用 $a(x+u)\geqslant ah_a=2s=au+bv+cw$ 等.

(2) 先证明 $\dfrac{v+w}{x}\leqslant 2\sin\dfrac{A}{2}$ 等.)

15. 在 $\triangle ABC$ 中, R_a, R_b, R_c 分别是边 a, b, c 上的傍切圆半径, 求证: $h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a\leqslant R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a$.

(提示: 利用 $ah_a=2s=(b+c-a)R_a$ 等, 分别计算左端及右端, 并且注意第二节不等式(2.4).)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $\dfrac{R_a}{h_a}+\dfrac{R_b}{h_b}+\dfrac{R_c}{h_c}\geqslant 3$, 这里 R_b, R_a, R_c 分别是边a, b, c 上的傍切圆半径.

(提示: 先证明 $\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{R_b}+\dfrac{1}{R_c}$ 等关系式.)

17. $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c, 面积是 s, $\triangle A^*B^*C^*$ 的三边分别为 a^*, b^*, c^*, 面积是 s^*, 以 $a+a^*$, $b+b^*$, $c+c^*$ 为三边组成的一个三角形面积为 A, 求证:

$$\sqrt{s}+\sqrt{s^*}\leqslant\sqrt{A}.$$

(提示: 利用第一节不等式(1.71).)

18. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 外心为 O, 直线 AO, BO, CO 交对边于 A_1, B_1, C_1, 求证: $OA_1+OB_1+OC_1\geqslant\dfrac{3}{2}R$.

(提示: 先利用面积之比证明 $\dfrac{OA_1}{OA_1+R}+\dfrac{OB_1}{OB_1+R}+\dfrac{OC_1}{OC_1+R}=1$.)

19. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, I 是内心, AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高, H 是垂心. 求证: $AI+BI+CI\geqslant 2(HD+HE+HF)$.

(提示: 先证明 $AI=4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ 等, 然后利用第三节不等式(3.93) 证明 $AH+BH+CH\geqslant AI+BI+CI$. 注意 $AI+BI+CI+3r\geqslant AD+BE+CF$. 最后利用 Erdös-Mordell 不等式.)

20. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，I 是内心，O 是外心，H 是垂心，P 是重心，求证：

$$\frac{9(AP^2+BP^2+CP^2)}{AO^2+BO^2+CO^2} \quad \frac{AHBHCH}{AIBICI}\leqslant 8.$$

$\Big($提示：$AO^2+BO^2+CO^2=3R^2$，$AP^2+BP^2+CP^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)=\frac{8}{3}R^2(1+\cos A\cos B\cos C)$．$AHBHCH=8R^3\cos A\cos B\cdot\cos C$，$AIBICI=64R^3\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$．$\Big)$

21. 平面凸四边形边长分别是 a, b, c, d，面积为 s，求证：

(1) $a+b+c+d\geqslant 4\sqrt{s}$；

(2) $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant 4s$．

(提示：利用例 25 引理和 $G_4\leqslant A_4$．)

22. 求证：半径为 R（R 是正常数）的圆内接 n 边形，以正 n 边形的面积为最大．

$\Big($提示：先证明当圆心在 n 边形外部时，这 n 边形面积不是最大的．当圆心在 n 边形内部或边上时，利用

$$s=\frac{1}{2}R^2(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)$$

和第一节例 1．$\Big)$

23. 内切圆半径相同的 n 边形中，求证：以正 n 边形的面积为最小．

$\Big($提示：利用 $s=r^2\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{A_i}{2}$ 和 $f(x)=\operatorname{ctg}x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 是一个凸函数．$\Big)$

24. 已知圆内接 n 边形的 n 条边长分别是 a_1, a_2, $\cdots$, a_n，圆半径是 R，求证：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{n}{2R\sin\frac{\pi}{n}}.$$

$\Big($提示：$a_i=2R\sin\frac{\theta_i}{2}$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i\leqslant 2\pi$．$\Big)$

25. $ABCDE$ 是半径为 1 的半圆上内接凸五边形，其中 AE 是直径，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DE=d$．求证：

$$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd<4.$$

(提示：连结 AC 和 CE，设 $\theta=\angle CEA$，利用余弦定理.)

下面五个习题，我们不给提示，你们能解决它们吗？

26. $ABCD$ 是一个凸四边形，s 是面积，对角线 AC、BD 相交于 O，求证：$\sqrt{s_{\triangle AOB}}+\sqrt{s_{\triangle COD}}\leqslant\sqrt{s}$，等号成立当且仅当 AB 平行于 CD.

27. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$.

28. (1) 设三个正实数 a, b, c 满足 $(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$，求证：$a$, b, c 一定是某个三角形的三条边长.

(2) 设 n 个正实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 满足

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)\ (n\geqslant 3).$$

求证：这些数中任何三个一定是某个三角形的三条边长.

29. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$R^2(a+b+c)\geqslant\dfrac{a^2b^2}{a+b-c}$.

30. H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，L 为 $\triangle ABC$ 的内切圆中一个内接三角形的周长，求证：$AH+BH+CH\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{3}}L$.

五　研究一个不等式

前四节，从 Jensen 不等式谈起，我们已介绍了一百个不等式方面的题目．在这本小册子的最后一节，我想通过一个大家熟知的不等式，和读者一起较深入地研究这个不等式．

第二十五届(1984 年)国际中学生数学奥林匹克竞赛有这样一个题目：

(1) 求证：$0\leqslant yz+zx+xy-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$．这里 x, y, z 是非负实数，而且 $x+y+z=1$．

证明　记

$$A=yz+zx+xy-2xyz. \tag{5.1}$$

如果 x, y, z 之中至少有一个为 0，不妨设 $z=0$，利用 x, y 非负，有 $A=xy\geqslant 0$，和

$$A=xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{7}{27}. \tag{5.2}$$

下面设 x, y, z 全为正实数．由于 $x+y+z=1$，读者一定知道

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 9. \tag{5.3}$$

两边同乘以 xyz，有

$$yz+zx+xy\geqslant 9xyz. \tag{5.4}$$

那么

$$A\geqslant 7xyz>0. \tag{5.5}$$

现在来证明 $A\leqslant\frac{7}{27}$. 不妨设 $x\geqslant y\geqslant z>0$, 令

$$x+y=\frac{2}{3}+\delta, \tag{5.6}$$

则 $z=\frac{1}{3}-\delta$, $0\leqslant\delta<\frac{1}{3}$.

$$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}\right)^2. \tag{5.7}$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned}A&=z(x+y)+xy(1-2z)\\&=\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\left(\frac{2}{3}+\delta\right)+xy\left(\frac{1}{3}+2\delta\right)\\&\leqslant\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\left(\frac{2}{3}+\delta\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}+2\delta\right)\\&=\frac{7}{27}-\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^3}{2}\\&=\frac{7}{27}-\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\leqslant\frac{7}{27}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

从上面的证明可以看出

$$yz+zx+xy-9xyz\geqslant0. \tag{5.9}$$

换句话说, 我们可以估计 $yz+zx+xy-9xyz$ 的上、下界.

让我们考虑更一般情况, 令

$$B=yz+zx+xy-kxyz, \tag{5.10}$$

这里 k 是正常数, x, y, z 仍是非负实数, 且 $x+y+z=1$. 我们来估计 B 的上、下界.

如果 x, y, z 之中至少有一个为 0, 则从(1)的证明知道 $B\geqslant0$, 且 $B\leqslant\frac{1}{4}$. 下面考虑 x, y, z 全是正实数情况. 从 x, y, z 全为正实数, 当 $k\leqslant9$ 时, 从(5.4), 有 $B\geqslant0$. 当 $k>9$ 时, 利用 $G_3\leqslant A_3$, 有

$$xyz\leqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{1}{27}. \tag{5.11}$$

利用(5.4)和(5.11)，有

$$\begin{aligned}B&=yz+zx+xy-9xyz+(9-k)xyz\\&\geqslant(9-k)xyz\geqslant\frac{1}{27}(9-k).\end{aligned} \tag{5.12}$$

引入记号 $\min(a, b)$，它表示两实数 a, b 中较小的一个．例如 $\min(4, 3)=3$，$\min\left(-1, \frac{1}{5}\right)=-1$．从上面叙述，我们有

$$B\geqslant\min\left(\frac{1}{27}(9-k), 0\right). \tag{5.13}$$

现在来估计 B 的上界，同(1)，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z>0$，引入变换(5.6)，那么，

$$\begin{aligned}B&=z(x+y)+xy(1-kz)\\&=\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\left(\frac{2}{3}+\delta\right)\\&\quad+xy\left[1-k\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\right].\end{aligned} \tag{5.14}$$

当 $k>3$ 和 $0\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{3k}(k-3)$ 时，$1-k\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\leqslant0$．那么，

$$\begin{aligned}B&\leqslant\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\left(\frac{2}{3}+\delta\right)\\&=\frac{2}{9}-\delta\left(\frac{1}{3}+\delta\right)\\&\leqslant\frac{2}{9}.\ \left(\text{注意 }\frac{2}{9}<\frac{1}{4}\right)\end{aligned} \tag{5.15}$$

当 $k>3$ 和 $\frac{1}{3k}(k-3)<\delta<\frac{1}{3}$ 时，$1-k\left(\frac{1}{3}-\delta\right)>0$．再利用(5.7)和 $0\leqslant\delta<\frac{1}{3}$，有

$$B \leqslant \left(\frac{1}{3}-\delta\right)\left(\frac{2}{3}+\delta\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}\right)^2\left(k\delta+1-\frac{k}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{k}{9}\right)+\frac{1}{4}(k-3)\delta^2+\frac{k}{4}\delta^3$$
$$<\frac{1}{3}\left(1-\frac{k}{9}\right)+\frac{1}{36}(k-3)+\frac{k}{108}=\frac{1}{4}. \qquad (5.16)$$

再观察 $0<k\leqslant 3$ 的情况，首先，我们有 $1-k\left(\frac{1}{3}-\delta\right)>0$.

从(5.14)和(5.7)，我们有

$$B \leqslant \left(\frac{1}{3}-\delta\right)\left(\frac{2}{3}+\delta\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}\right)^2\left[1-k\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{k}{9}\right)+\frac{1}{4}(k-3)\delta^2+\frac{k}{4}\delta^3$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{k}{9}\right)+\frac{\delta^2}{4}[k(1+\delta)-3]. \qquad (5.17)$$

当 $0<k\leqslant\frac{9}{4}$ 时，$k(1+\delta)-3<\frac{4}{3}k-3\leqslant 0$, 那么

$$B \leqslant \frac{1}{3}\left(1-\frac{k}{9}\right). \quad \left(注意\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{k}{9}\right)\geqslant\frac{1}{4}\right) \qquad (5.18)$$

当 $\frac{9}{4}<k\leqslant 3$ 时，如果 $k(1+\delta)-3>0$ 时，那么利用 $0<\delta<\frac{1}{3}$. 读者容易明白

$$\frac{\delta^2}{4}[k(1+\delta)-3]<\frac{1}{36}\left(\frac{4}{3}k-3\right). \qquad (5.19)$$

将(5.19)代入(5.17)，有

$$B<\frac{1}{4}. \qquad (5.20)$$

当 $\frac{9}{4}<k\leqslant 3$, 和 $k(1+\delta)-3\leqslant 0$ 时，从(5.17)，有

$$B \leqslant \frac{1}{3}\left(1-\frac{k}{9}\right)<\frac{1}{4}. \qquad (5.21)$$

于是，我们证明了下述不等式:

(2) x, y, z 是非负实数，$x+y+z=1$，k 是正常数. 当 $k>\frac{9}{4}$ 时，

$$\min\left(\frac{1}{27}(9-k),\ 0\right)\leqslant yz+zx+xy-kxyz\leqslant\frac{1}{4}. \tag{5.22}$$

当 $0<k\leqslant\frac{9}{4}$ 时，

$$0\leqslant yz+zx+xy-kxyz\leqslant\frac{1}{3}\left(1-\frac{k}{9}\right). \tag{5.23}$$

显然. (5.23) 推广了 (1).

把 $x+y+z=1$ 这一条件拓广为 $x+y+z=s$，这里 s 是正常数. 利用 (2)，我们立刻可以写出

$$C=yz+zx+xy-kxyz \tag{5.24}$$

的上、下界.

令 $x=sx^*$，$y=sy^*$，$z=sz^*$，那么 $x^*+y^*+z^*=1$，和

$$C=s^2(y^*z^*+z^*x^*+x^*y^*-ksx^*y^*z^*). \tag{5.25}$$

利用 (2) 的结论，我们有

(3) x, y, z 是非负实数，$x+y+z=s$，s, k 是正常数.

当 $ks>\frac{9}{4}$ 时，

$$\min\left(\frac{s^2}{27}(9-ks),\ 0\right)\leqslant yz+zx+xy-kxyz\leqslant\frac{s^2}{4}. \tag{5.26}$$

当 $0<ks\leqslant\frac{9}{4}$ 时，

$$0\leqslant yz+zx+xy-kxyz\leqslant\frac{s^2}{3}\left(1-\frac{ks}{9}\right). \tag{5.27}$$

把 $x+y+z=s$ 这一条件拓广为 $x+y+z\leqslant s$，这里 s 仍旧

是一个正常数，我们来估计

$$D=yz+zx+xy-kxyz \tag{5.28}$$

的上、下界，这里 x, y, z 仍旧是非负实数，k 是正常数.

当 x, y, z 中至少有一个为 0 时，不妨设 $z=0$，那么，$D=xy$. 显然 $D\geqslant 0$, $D\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqslant\frac{s^2}{4}$.

现在考虑 x, y, z 全是正实数情况. 由于 $(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 9$，因而，我们有

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{9}{s}. \tag{5.29}$$

上式两边同乘以 xyz，有

$$yz+zx+xy\geqslant\frac{9}{s}xyz. \tag{5.30}$$

于是

$$D\geqslant\left(\frac{9}{s}-k\right)xyz. \tag{5.31}$$

当 $sk\leqslant 9$ 时，$D\geqslant 0$. 当 $sk>9$ 时，利用 $xyz\leqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3\leqslant\left(\frac{s}{3}\right)^3$，有 $D\geqslant\frac{s^2}{27}(9-ks)$. 因而，

$$D\geqslant\min\left(0,\ \frac{s^2}{27}(9-ks)\right). \tag{5.32}$$

现在考虑 D 的上界. 类似(5.6)，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z>0$,

$$x+y=\frac{2}{3}sp+\delta,\ z=\frac{1}{3}sp-\delta. \tag{5.33}$$

这里 $0<p\leqslant 1$, 和 $0\leqslant\delta<\frac{1}{3}sp$.

$$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{3}sp+\frac{\delta}{2}\right)^2. \tag{5.34}$$

$$D=\left(\frac{1}{3}sp-\delta\right)\left(\frac{2}{3}sp+\delta\right)+xy\left[1-k\left(\frac{1}{3}sp-\delta\right)\right]. \tag{5.35}$$

当 $1-k\left(\frac{1}{3}sp-\delta\right)\leqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned}D&\leqslant\left(\frac{1}{3}sp-\delta\right)\left(\frac{2}{3}sp+\delta\right)\\&=\frac{2}{9}s^2p^2-\delta\left(\frac{1}{3}sp+\delta\right)\leqslant\frac{2}{9}s^2.\end{aligned} \tag{5.36}$$

当 $1-k\left(\frac{1}{3}sp-\delta\right)>0$ 时，

$$\begin{aligned}D&\leqslant\left(\frac{1}{3}sp-\delta\right)\left(\frac{2}{3}sp+\delta\right)+\left(\frac{1}{3}sp+\frac{\delta}{2}\right)^2\\&\quad\cdot\left[1-k\left(\frac{1}{3}sp-\delta\right)\right]\\&=\frac{1}{3}s^2p^2\left(1-\frac{1}{9}spk\right)+\frac{\delta^2}{4}[k(sp+\delta)-3].\end{aligned} \tag{5.37}$$

当 $k(sp+\delta)-3\leqslant 0$ 时，从上式，有

$$D\leqslant\frac{1}{3}s^2p^2\left(1-\frac{1}{9}spk\right). \tag{5.38}$$

由于 $ksp\leqslant 3$，则 $1-\frac{1}{9}spk>0$，因而

$$\begin{aligned}D&\leqslant\frac{108}{k^2}\left(\frac{1}{18}spk\right)\left(\frac{1}{18}spk\right)\left(1-\frac{1}{9}spk\right)\\&\leqslant\frac{108}{k^2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{18}spk+\frac{1}{18}spk+1-\frac{1}{9}spk\right)\right]^3\\&=\frac{4}{k^2}.\end{aligned} \tag{5.39}$$

当 $k(sp+\delta)-3>0$ 时，由于 $0\leqslant\delta<\frac{1}{3}sp$，则从(5.37)，有

$$D<\frac{1}{3}s^2p^2\left(1-\frac{1}{9}spk\right)+\frac{1}{36}s^2p^2\left[k\left(sp+\frac{1}{3}sp\right)-3\right]$$
$$=\frac{1}{4}s^2p^2\leqslant\frac{1}{4}s^2. \tag{5.40}$$

用 $\max(a, b)$ 表示两实数 a, b 中较大的一个. 例如

$$\max(3,4)=4,\ \max\left(-1,\ \frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}.$$

注意到 $\frac{2}{9}s^2<\frac{1}{4}s^2$, 因而综合前面的叙述, 我们有:

(4) x, y, z 是非负实数, $x+y+z\leqslant s$, s, k 是正常数,

$$\min\left(0,\ \frac{s^2}{27}(9-ks)\right)\leqslant yz+zx+xy-kxyz$$
$$\leqslant\max\left(\frac{4}{k^2},\ \frac{s^2}{4}\right). \tag{5.41}$$

从上面的研究可以看出, 难点在于 x, y, z 全为正实数时上界的估计. 下面推广到 n 个变数的情况.

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个正实数, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$, 估计

$$E=x_1x_2\cdots x_n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-k\right) \tag{5.42}$$

的上、下界, 这里 k 是某个正常数 $n\geqslant4$.

由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$, 读者都知道 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant n^2$, 两端乘以 $x_1x_2\cdots x_n$, 有

$$x_1x_2\cdots x_n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant n^2x_1x_2\cdots x_n, \tag{5.43}$$

因而

$$E\geqslant(n^2-k)x_1x_2\cdots x_n. \tag{5.44}$$

当 $k\leqslant n^2$ 时, $E\geqslant0$; 当 $k>n^2$ 时, 利用 $x_1x_2\cdots x_n\leqslant\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^n=$

$\left(\frac{1}{n}\right)^n$，有 $E \geqslant (n^2-k)\left(\frac{1}{n}\right)^n$. 那么，

$$E \geqslant \min\left(0,\ (n^2-k)\left(\frac{1}{n}\right)^n\right). \tag{5.45}$$

现在估计 E 的上界，不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n > 0$，类似(5.6)，令

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{n-1}{n} + \delta, \tag{5.46}$$

则 $x_n = \frac{1}{n} - \delta$，$0 \leqslant \delta < \frac{1}{n}$.

$$E = \left(\frac{1}{n} - \delta\right) x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} + x_1 x_2 \cdots x_{n-1}\left[1 - k\left(\frac{1}{n} - \delta\right)\right]. \tag{5.47}$$

先估计 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i}$ 的上界，这可以由谢宾斯基(Sierpinski)不等式来解决.

引理(Sierpinski 不等式)　设 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 是 p 个正实数，自然数 $p \geqslant 2$，则 $x_1 x_2 \cdots x_p \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{x_i} \leqslant \frac{1}{p^{p-2}}\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^{p-1}$.

证明　当 $p=2$ 时，由于

$$x_1 x_2\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = x_2 + x_1. \tag{5.48}$$

Sierpinski 不等式取等号，显然成立.

当 $p=3$ 时，我们有

$$x_1 x_2 x_3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 \leqslant \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)^2. \tag{5.49}$$

因而 Sierpinski 不等式也是正确的. 设当 $p=k$ 时，Sierpinski

不等式成立，考虑 $p=k+1$ 情况，利用通常的记号，

$$A_p=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}x_i,\ G_p=\sqrt[p]{x_1x_2\cdots x_p},\ H_p=\frac{p}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}. \tag{5.50}$$

那么，Sierpinski 不等式就是

$$G_p^p\leqslant A_p^{p-1}H_p. \tag{5.51}$$

明显地，我们有

$$A_{k+1}=\frac{kA_k+x_{k+1}}{k+1},\ G_{k+1}^{k+1}=G_k^k x_{k+1},$$
$$H_{k+1}=\frac{k+1}{\frac{k}{H_k}+\frac{1}{x_{k+1}}}=\frac{(k+1)x_{k+1}H_k}{kx_{k+1}+H_k}. \tag{5.52}$$

设当 $p=k$ 时，Sierpinski 不等式成立，就是说，

$$G_k^k\leqslant A_k^{k-1}H_k. \tag{5.53}$$

因而，利用(5.52)，有

$$\frac{A_{k+1}^kH_{k+1}}{G_{k+1}^{k+1}}\frac{G_k^k}{A_k^{k-1}H_k}=\frac{1}{(k+1)^{k-1}}\frac{(kA_k+x_{k+1})^k}{A_k^{k-1}(kx_{k+1}+H_k)} \tag{5.54}$$

令 $x_0=\dfrac{kA_k-H_k}{k-1}$，那么，

$$\frac{A_{k+1}^kH_{k+1}}{G_{k+1}^{k+1}}\frac{G_k}{A_k^{k-1}H_k}=\frac{\left(\frac{kA_k+x_{k+1}}{k+1}\right)^k}{A_k^{k-1}\left[\frac{kA_k+x_{k+1}}{k+1}+\frac{(k-1)(x_{k+1}-x_0)}{k+1}\right]}. \tag{5.55}$$

令

$$f(x)=\frac{\left(\frac{kA_k+x}{k+1}\right)^k}{A_k^{k-1}\left[\frac{kA_k+x}{k+1}+\frac{(k-1)(x-x_0)}{k+1}\right]}.\quad (x>0) \tag{5.56}$$

那么,

$$f(x)-f(x_0)=\frac{\left(\frac{kA_k+x}{k+1}\right)^k}{A_k^{k-1}\left[\frac{kA_k+x}{k+1}+\frac{(k-1)(x-x_0)}{k+1}\right]}$$

$$-\frac{\left(\frac{kA_k+x_0}{k+1}\right)^{k-1}}{A_k^{k-1}}$$

$$=\frac{1}{A_k^{k-1}\left[\frac{kA_k+x}{k+1}+\frac{(k-1)(x-x_0)}{k+1}\right]}$$

$$\cdot\left\{\frac{kA_k+x}{k+1}\left[\left(\frac{kA_k+x}{k+1}\right)^{k-1}-\left(\frac{kA_k+x_0}{k+1}\right)^{k-1}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{(k-1)(x-x_0)}{k+1}\left(\frac{kA_k+x_0}{k+1}\right)^{k-1}\right\}. \qquad (5.57)$$

当 $x\geqslant x_0$ 时,

$$\left(\frac{kA_k+x}{k+1}\right)^{k-1}-\left(\frac{kA_k+x_0}{k+1}\right)^{k-1}$$

$$=\left(\frac{kA_k+x}{k+1}-\frac{kA_k+x_0}{k+1}\right)\left[\left(\frac{kA_k+x}{k+1}\right)^{k-2}\right.$$

$$+\left(\frac{kA_k+x}{k+1}\right)^{k-3}\left(\frac{kA_k+x_0}{k+1}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{kA_k+x}{k+1}\right)\left(\frac{kA_k+x_0}{k+1}\right)^{k-3}$$

$$\left.+\left(\frac{kA_k+x_0}{k+1}\right)^{k-2}\right]$$

$$\geqslant\frac{(x-x_0)}{k+1}(k-1)\left(\frac{kA_k+x_0}{k+1}\right)^{k-2}. \qquad (5.58)$$

因而,$f(x)\geqslant f(x_0)$. 当 $x<x_0$ 时,由于 $x-x_0<0$, (5.58)仍旧成立,同样有 $f(x)>f(x_0)$. 所以,对于任意 $x>0$,始终有

$$f(x)\geqslant f(x_0). \qquad (5.59)$$

那么 $f(x_{k+1})\geqslant f(x_0)$. 利用 $x_0=\dfrac{kA_k-H_k}{k-1}$, 和 $A_k\geqslant H_k$, 有

$$f(x_0)=\frac{\left(\dfrac{kA_k+x_0}{k+1}\right)^{k-1}}{A_k^{k-1}}$$

$$=\left(\frac{k^2A_k-H_k}{(k^2-1)A_k}\right)^{k-1}\geqslant 1. \tag{5.60}$$

这导致 $f(x_{k+1})\geqslant 1$, 从(5.55), 有

$$\frac{A_{k+1}^{k}H_{k+1}}{G_{k+1}^{k+1}}\,\frac{G_k^k}{A_k^{k-1}H_k}\geqslant 1. \tag{5.61}$$

从上式, 并且利用归纳法假设, 有

$$\frac{A_{k+1}^{k}H_{k+1}}{G_{k+1}^{k+1}}\geqslant\frac{A_k^{k-1}H_k}{G_k^k}\geqslant 1. \tag{5.62}$$

因而我们证明了 Sierpinski 不等式.

利用 Sierpinski 不等式, 令 $p=n-1$, 并且利用(5.46), 有

$$x_1x_2\cdots x_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x_i}\leqslant\frac{1}{(n-1)^{n-3}}\left(\frac{n-1}{n}+\delta\right)^{n-2}. \tag{5.63}$$

将(5.63)代入(5.47), 有

$$E\leqslant\frac{1}{(n-1)^{n-3}}\left(\frac{1}{n}-\delta\right)\left(\frac{n-1}{n}+\delta\right)^{n-2}$$

$$+x_1x_2\cdots x_{n-1}\left[1-k\left(\frac{1}{n}-\delta\right)\right]. \tag{5.64}$$

如果 $0<k\leqslant n$, 则 $1-k\left(\dfrac{1}{n}-\delta\right)\geqslant 0$, 利用 $G_{n-1}\leqslant A_{n-1}$ 和(5.46),

$$x_1x_2\cdots x_{n-1}\leqslant\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-1}. \tag{5.65}$$

将(5.65)代入(5.64)，我们有

$$E\leqslant\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-2}\left\{(n-1)\left(\frac{1}{n}-\delta\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)\left[1-k\left(\frac{1}{n}-\delta\right)\right]\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-2}\left[\left(1-\frac{k}{n^2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{(n-2)(n^2-k)}{n(n-1)}\delta+\frac{k}{n-1}\delta^2\right]. \qquad (5.66)$$

然而，

$$\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-2}\left[\left(1-\frac{k}{n^2}\right)-\frac{(n-2)(n^2-k)}{n(n-1)}\delta\right.$$

$$\left.+\frac{k}{n-1}\delta^2\right]-\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2}\left(1-\frac{k}{n^2}\right)$$

$$=\left(1-\frac{k}{n^2}\right)\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2}\right]$$

$$+\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-2}\delta\left[\frac{k\delta}{n-1}-\frac{(n-2)(n^2-k)}{n(n-1)}\right].$$

$$(5.67)$$

明显地，

$$\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-3}\right.$$

$$+\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-4}\frac{1}{n}+\cdots$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{n-4}+\left(\frac{1}{n}\right)^{n-3}\right]$$

$$\leqslant\frac{(n-2)\delta}{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-3}. \qquad (5.68)$$

由于 $0<k\leqslant n$，将(5.68)代入(5.67)，我们有

$$\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-2}\left[\left(1-\frac{k}{n^2}\right)-\frac{(n-2)(n^2-k)}{n(n-1)}\delta\right.$$

$$\left.+\frac{k}{n-1}\delta^2\right]-\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2}\left(1-\frac{k}{n^2}\right)$$

$$\leqslant\left(1-\frac{k}{n^2}\right)\frac{(n-2)\delta}{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-3}$$

$$+\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-2}\delta\left[\frac{k\delta}{n-1}-\frac{(n-2)(n^2-k)}{n(n-1)}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-3}\delta\left\{\left(1-\frac{k}{n^2}\right)\frac{(n-2)}{n-1}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)\left[\frac{k\delta}{n-1}-\frac{(n-2)(n^2-k)}{n(n-1)}\right]\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n-1}\right)^{n-3}\frac{\delta^2}{n(n-1)^2}[k(n-1)+kn\delta$$

$$-(n-2)(n^2-k)]. \tag{5.69}$$

由于 $0\leqslant\delta<\frac{1}{n}$. $0<k\leqslant n$, 和 $n\geqslant4$, 那么,

$$\begin{aligned}&(n-2)(n^2-k)-k[(n-1)+n\delta]\\&>(n-2)(n^2-k)-kn\\&=n^2(n-2)-2k(n-1)\\&\geqslant n^2(n-2)-2n(n-1)\\&=n[n(n-4)+2]>0.\end{aligned} \tag{5.70}$$

所以, (5.69)的右端小于等于 0. 于是,

$$E\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2}\left(1-\frac{k}{n^2}\right). \tag{5.71}$$

因此, 我们有了一个新不等式:

(5) $x_1, x_2, \cdots x_n$ 是正实数, $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$. 自然数 $n\geqslant4$, $0<k\leqslant n$,

$$0<x_1x_2\cdots x_n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-k\right)\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2}\left(1-\frac{k}{n^2}\right). \tag{5.72}$$

(5.72)是(5.23)的一个推广，当然也是(1)的一个推广．当 $k>n$ 时，(5.45)给出了 E 的一个下界估计，对于 E 的上界的估计，有兴趣的读者不妨讨论、研究一下．

本书暂此搁笔，愿读者在琴生不等式的应用方面有新的开拓，谱上新篇．